

เฉลยข้อที่ 3

ตอนที่ 1 เลนส์แรงโน้มถ่วง

[7.8 คะแนน]

3.1 SOLUTION

เขียนมิติของมวล M ถูก (M)

เขียนมิติของ c ถูก ($L T^{-1}$)

เขียนมิติของ G ถูก ($L^3 M^{-1} T^{-2}$)

ดัชนีหักเหแสงเป็นปริมาณที่ไร้มิติ หรือ ไม่มีหน่วย

แทนหน่วยลงในสมการ

$$n = 1 + \frac{2G^i M^j}{rc^k}$$

จะได้ระบบสมการ

$$3i - k = 1$$

$$i = j$$

$$2i = k$$

แก้สมการได้ค่า $i = j = 1$ และ $k = 2$

3.2 SOLUTION

ใช้พีทาโกรัส จะสามารถเขียน $\ell_1 = \sqrt{y^2 + d_1^2} + \sqrt{y^2 + d_2^2}$

ใช้การประมาณ Binomial

$$\ell_1 \approx d_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{y^2}{d_1^2} \right) + d_2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{y^2}{d_2^2} \right)$$

จัดรูป

$$\ell_1 \approx d_1 + d_2 + \frac{y^2(d_1 + d_2)}{2d_1d_2}$$

3.3 SOLUTION

ใช้นิยาม $n = c/v$ และ $v = d\ell/dt$

จะได้

$$dt = \frac{nd\ell}{c}$$

3.4 SOLUTION

แทน $n = 1 + 2GM/rc^2$ ใน $dt = nd\ell/c$ แล้วทำการอินทิเกรตจากจุด A ไปยังจุด B จะได้

$$t = \frac{\ell_1}{c} + \frac{2GM}{c^3} \int \frac{1}{r} d\ell$$

เนื่องจากเส้นทางสามารถประมาณเป็นเส้นตรง เราสามารถประมาณ

$$d\ell = dx, \quad r = \sqrt{y^2 + x^2}$$

ทำการใส่ขอบเขตของการอินทิเกรตจาก $x = -d_1$ ไปยัง $x = d_2$

ใช้สูตรอินทิเกรตที่ให้ในข้อสอบ

$$t = \frac{\ell_1}{c} + \frac{2GM}{c^3} \ln \left(\frac{\sqrt{y^2 + d_2^2} + d_2}{\sqrt{y^2 + d_1^2} - d_1} \right)$$

ใช้การประมาณ Binomial $\sqrt{y^2 + d_2^2} + d_2 \approx 2d_2$

ใช้การประมาณ Binomial $\sqrt{y^2 + d_1^2} - d_1 \approx y^2/2d_1$

จะได้

$$t \approx \frac{\ell_1}{c} + \frac{2GM}{c^3} \ln\left(\frac{4d_1d_2}{y^2}\right)$$

3.5 SOLUTION

นักเรียนตระหนักว่าค่าน้อยสุดเกิดเมื่อ $dt/dy = 0$

ทำการหาอนุพันธ์

$$\frac{d\ell_1}{dy} = \frac{y(d_1 + d_2)}{d_1d_2}, \quad \frac{d}{dy} \left[\ln\left(\frac{4d_1d_2}{y^2}\right) \right] = -\frac{2}{y}$$

แทนค่าใน $dt/dy = 0$ จะได้สมการ

$$y^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{d_1d_2}{d_1 + d_2}$$

3.6 SOLUTION

จากรูป เราจะสามารถเขียน $y = \beta d_2$

แทน y ใน

$$y^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{d_1d_2}{d_1 + d_2}$$

จัดรูป

$$\beta^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{d_1 + d_2}$$

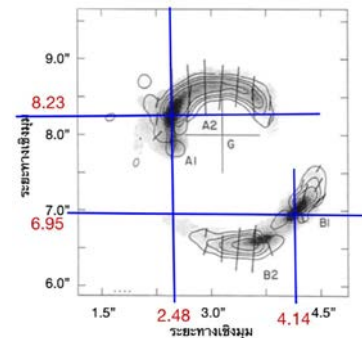
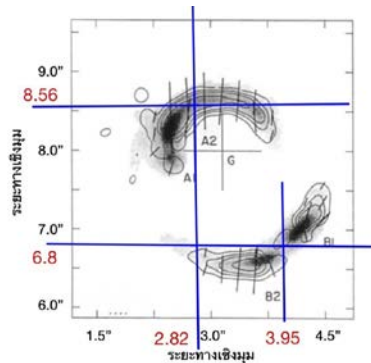
$$\beta = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{d_1 + d_2}}$$

ตอนที่ 2 วงแหวนของไอน์สไตน์

[2.2 คะแนน]

3.7 SOLUTION

ทำการวัดรูป 3.4 (ข) ด้วยไม้บรรทัดและระบุจุดศูนย์กลางที่อยู่บนขอบของวงแหวนโดยจุดศูนย์กลางควรอยู่ฝั่งตรงข้ามกัน
ตัวอย่างเช่น



จากรูปคู่อันดับ ใช้พิทาโกรัสคำนวณหาระยะเชิงมุมของเส้นผ่านศูนย์กลาง

คำตอบจะอยู่ในช่วง $\beta = 1.05'' \pm 0.10''$

จากข้อมูล คำนวณหา $d_1 = 2360 \text{ Mpc}$

แปลงหน่วย

$$\beta = \frac{1.05}{3600} \times \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

แปลงหน่วย

$$d_1 + d_2 = 3300 \times 10^6 \times 3.086 \times 10^{13} \times 10^3 \text{ m}$$

แทนค่าใน

$$\beta^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{d_1 + d_2}$$

เพื่อหามวล $M = 3.546 \times 10^{41} \text{ kg} = 3.55 \times 10^{41} \text{ kg}$ (ตอบ 2 ถึง 3 sf)

ช่วงคำตอบ $M = (3.55 \pm 0.34) \times 10^{41} \text{ kg}$