

ข้อที่ 3

[10 คะแนน]

เลนส์แรงโน้มถ่วงกับกฎของแฟร์มาต์

ปรากฏการณ์เลนส์แรงโน้มถ่วงเป็นหลักฐานชิ้นสำคัญที่ใช้ทดสอบความถูกต้องของทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป ในข้อนี้เราจะใช้ความรู้ของแสงเชิงเรขาคณิตมาอธิบายปรากฏการณ์เลนส์แรงโน้มถ่วง

ตอนที่ 1 เลนส์แรงโน้มถ่วง

จากความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป เราพบว่าจุดมวล M ทำให้กาล-อวกาศเกิดความโค้ง ซึ่งเป็นสาเหตุที่ทำให้แสงเดินทางเป็นเส้นโค้งเมื่อแสงเดินทางเข้าใกล้จุดมวล M เราสามารถเข้าใจปรากฏการณ์ที่แสงเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งได้โดยใช้หลักการเวลาที่สั้นที่สุดของแฟร์มาต์ กล่าวคือ

แสงจะเดินทางตามเส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุด

โดยผลของความโค้งของกาล-อวกาศนั้นให้ผลเสมือนกับว่าค่าดัชนีหักเหแสง n ที่ระยะห่าง r จากจุดมวล M มีค่าเท่ากับ

$$n = 1 + \frac{2G^i M^j}{rc^k}$$

เมื่อ G คือค่าคงที่โน้มถ่วงสากล

c คืออัตราเร็วแสงในสุญญากาศ

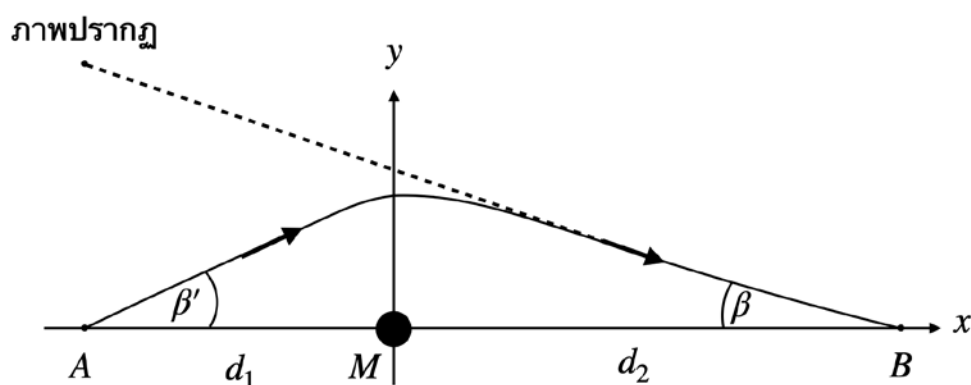
i, j, k คือตัวเลขชี้กำลัง

ดังนั้นเมื่อแสงเดินทางเข้าใกล้จุดมวล M จึงเกิดการหักเห

3.1 จงหาเลขชี้กำลัง i, j และ k

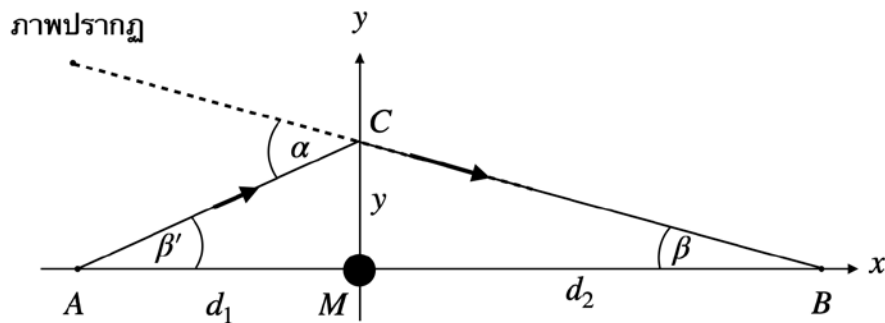
[1.3 คะแนน]

สมมติให้แสงเดินทางจากแหล่งกำเนิดแสง ณ จุด A ไปยังผู้สังเกต ณ จุด B โดยจุด A นั้นอยู่ห่างจากจุดมวล M (ซึ่งอาจจะเป็นกาแล็กซีหรือหลุมดำ) เป็นระยะทาง d_1 และจุด B อยู่ห่างจากจุดมวล M เป็นระยะทาง d_2 ดัชนีหักเหแสงมีค่าเปลี่ยนแปลงเมื่อแสงเคลื่อนที่เข้าใกล้จุดมวล M ทำให้เส้นทางการเคลื่อนที่ของแสงเป็นเส้นโค้งจากจุด A ไปยังจุด B ดังที่แสดงในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1

เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของดัชนีหักเหมีค่าน้อยมาก รังสีของแสงที่เกิดการโค้งเบนจึงเป็นรังสีที่อยู่ห่างจากจุดมวล M เป็นระยะทางน้อย ๆ ด้วยเหตุนี้นักเรียนสามารถทำการประมาณเส้นโค้งทางเดินของแสงเป็นรังสีตรงที่เคลื่อนที่มาจากจุด A และเกิดการเปลี่ยนทิศทางทันที ณ จุด C หลังจากนั้นแสงจะเดินทางเป็นเส้นตรงจากจุด C ไปยังจุด B ดังที่แสดงในรูปที่ 3.2 โดยจุด C อยู่ห่างจากจุดมวล M เป็นระยะ y เมื่อ $y/d_1 \ll 1$ และ $y/d_2 \ll 1$



รูปที่ 3.2

3.2 กำหนดให้ ℓ_1 คือระยะทาง ACB ที่แสงเดินทางจากจุด A ไปยังจุด B

จงเขียนและทำการประมาณ ℓ_1 ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายในรูปของ d_1 d_2 และ y

[1.4 คะแนน]

แนะนำ: ใช้การประมาณ $(1 + \delta)^p \approx 1 + p\delta$ เมื่อ $\delta \ll 1$

เพื่อที่จะคำนวณหาเวลาที่แสงใช้ในการเดินทางตามเส้นทาง ACB เนื่องจากแสงเดินทางด้วยอัตราเร็วไม่คงที่ การหาเวลาที่แสงใช้ในการเดินทางสามารถทำได้โดยพิจารณาช่วงเวลาสั้น ๆ dt ที่แสงใช้ในการเดินทางเป็นระยะทาง $d\ell$

3.3 จงเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง dt และ $d\ell$

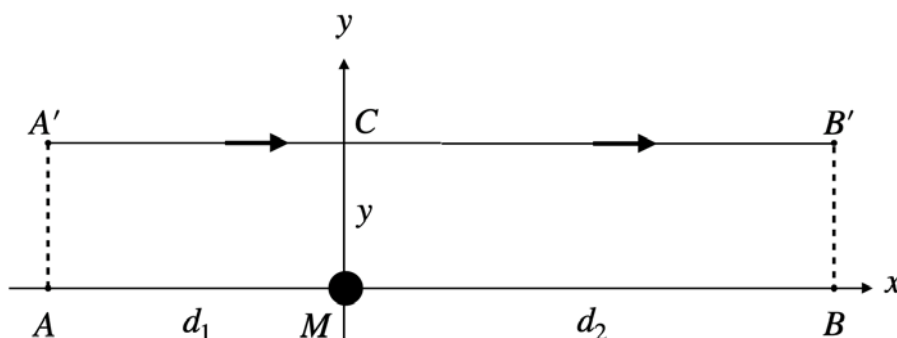
[0.4 คะแนน]

หากช่วงเวลาที่ใช้แสงใช้ในการเดินทางจากจุด A ไปยังจุด B มีค่าเท่ากับ t โดยที่

$$t = \frac{\ell_1}{c} + \int f(x)dx$$

เมื่อ $f(x)$ คือฟังก์ชันของ x

ในการหา $\int f(x)dx$ นักเรียนสามารถทำการประมาณเพิ่มได้ว่าเส้นทาง ACB นั้นเกือบจะเป็นเส้นตรง $A'B'$ ที่มีระยะห่างจากจุดมวล M เป็นระยะทาง y เนื่องจาก $y/d_1 \ll 1$ และ $y/d_2 \ll 1$ ดังที่แสดงในรูป 3.3



รูปที่ 3.3

3.4 จงแสดงว่า $\int f(x)dx$ ตลอดเส้นทางการเคลื่อนที่ของแสงมีค่าประมาณ

$$\frac{2GM}{c^3} \ln\left(\frac{4d_1 d_2}{y^2}\right)$$

[2.8 คะแนน]

แนะนำ: นักเรียนอาจจำเป็นต้องใช้

1. การประมาณ $(1 + \delta)^p \approx 1 + p\delta$ เมื่อ $\delta \ll 1$

2. สูตรอินทิเกรต

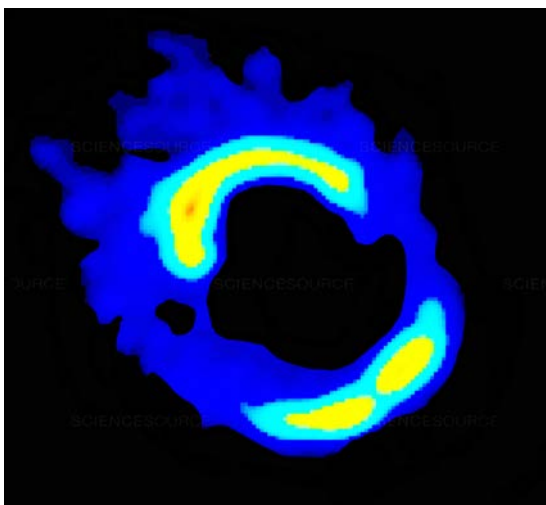
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

โดยที่ C คือค่าคงที่ของการอินทิเกรต

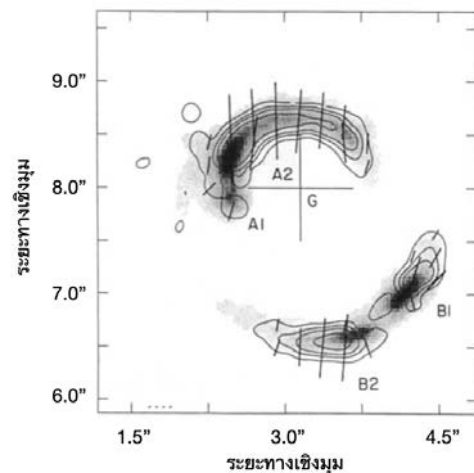
3.5 จงหาระยะ y ที่ทำให้แสงใช้เวลาเดินทางน้อยที่สุดจากจุด A ไปยังจุด B (ตอบในรูปของ $G M c d_1$ และ d_2) [1.2 คะแนน]

3.6 ผู้สังเกตที่จุด B จะสังเกตเห็นภาพปรากฏของแหล่งกำเนิดแสงอยู่ที่ระยะเชิงมุม β (ในรูป 3.2) เทียบกับแนวเล็งที่ผ่านจุดมวล M จงหาระยะเชิงมุม β ในรูปของ $G M c d_1$ และ d_2 [0.7 คะแนน]

ตอนที่ 2 วงแหวนของไอน์สไตน์



รูปที่ 3.4 (ก)



รูปที่ 3.4 (ข)

รูปที่ 3.4 (ก) แสดงปรากฏการณ์ที่มีชื่อว่า “วงแหวนของไอน์สไตน์” ที่มีชื่อว่า MG1654+1346 โดยปรากฏการณ์นี้เป็นหลักฐานข้อพิสูจน์ของเลนส์แรงโน้มถ่วง คลื่นวิทยุจากควอซาร์เกิดการโค้งเบนเมื่อเคลื่อนที่ผ่านกาแล็กซีรูปทรงรี โดยควอซาร์กาแล็กซีรูปทรงรีและโลกค่อนข้างอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ทำให้ผู้สังเกตบนโลกเห็นสัญญาณคลื่นวิทยุเป็นรูปวงแหวนที่มีความสมมาตรสูง โดยระยะทางเชิงมุมที่วัดในหน่วยฟิลิปดา (") กำหนดให้ระยะทางระหว่างโลกกับควอซาร์มีค่าเท่ากับ 3300 Mpc และระยะทางระหว่างโลกถึงกาแล็กซีรูปทรงรีมีค่าเท่ากับ 940 Mpc เมื่อ pc เป็นหน่วยวัดระยะทางทางดาราศาสตร์ โดย $1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{13} \text{ km}$

กำหนดให้ $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ และ $c = 3.00 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.7 จงใช้ข้อมูลจากรูป 3.4 (ข) ประมาณมวลของกาแล็กซีรูปทรงรี

[2.2 คะแนน]

แนะนำ: 1 องศาเท่ากับ 60 ลิปดาและ 1 ลิปดาเท่ากับ 60 ฟิลิปดา