

เฉลยข้อที่ 2

[10 คะแนน]

ตอนที่ 1 อากาศแห้ง

[3 คะแนน]

2.1 SOLUTION

การเปลี่ยนแปลงแบบ adiabatic จะได้ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} pV^\gamma &= \text{constant} \\ p\left(\frac{T}{p}\right)^\gamma &= \text{constant} \\ p^{1-\gamma}T^\gamma &= \text{constant} \\ T &\propto p^{1-(1/\gamma)} \end{aligned}$$

เราสามารถหา γ ได้จาก

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7R/2}{5R/2} = \frac{7}{5}$$

ดังนั้น

$$T \propto p^{2/7}, \quad k = \frac{2}{7}$$

MARKING SCHEME

Item	Marks (0.8)
a) เขียนความสัมพันธ์ของกระบวนการ adiabatic	0.4
b) เขียนนิยาม γ ถูกต้อง (0.1) และหาค่าถูกต้อง (0.1)	0.2
c) ได้ค่า k ถูกต้อง	0.2

2.2 SOLUTION

จาก $T \propto p^{2/7}$ เราสามารถเขียน

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_0} &= \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{2/7} \\ T_1 &= T_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{2/7} \end{aligned}$$

2.3 SOLUTION

วิธีที่ 1

จากข้อ 2.1 $T \propto p^{2/7}$ เราจะได้

$$\frac{dT}{dp} = \frac{2T}{7p}$$

สามารถหาอัตราส่วน T/p ได้จากกฎของแก๊สอุดมคติ

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{\mu V} = \frac{\rho RT}{\mu}$$

ดังนั้น

$$\frac{T}{p} = \frac{\mu}{\rho R}$$

และ

โจทย์กำหนดให้

$$\frac{dT}{dp} = \frac{2\mu}{7\rho R}$$

เราสามารถเขียน

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dz} &= \frac{dT}{dp} \frac{dp}{dz} \\ &= \frac{2\mu}{7\rho R} (-\rho g) \\ &= -\frac{2g\mu}{7R}\end{aligned}$$

วิธีที่ 2

จากกฎข้อ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์ $Q = dU + pdV$ และกระบวนการ adiabatic ($Q = 0$)

$$\begin{aligned}0 &= \frac{5}{2}nRdT + pdV \\ &= \frac{5}{2}nRdT + (nRdT - Vdp)\end{aligned}$$

$$\frac{7}{2}nRdT = Vdp$$

$$\frac{7}{2} \frac{m}{\mu} RdT = \frac{m}{\rho} dp$$

$$\frac{7R}{2\mu} \frac{dT}{dz} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}$$

$$\frac{7R}{2\mu} \frac{dT}{dz} = \frac{1}{\rho} (-\rho g)$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{2g\mu}{7R}$$

2.4 SOLUTION

จาก

$$\frac{dT}{dz} = -\alpha, \quad \alpha = \frac{2g\mu}{7R}$$

พิจารณาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิจาก T_0 เป็น T_1 เมื่อความสูงเพิ่มจาก $z = 0$ ไปเป็น $z = z_1$ เราจะได้

$$\frac{T_1 - T_0}{z_1 - 0} = -\alpha$$

$$z_1 = -\frac{1}{\alpha}(T_1 - T_0)$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \left(T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{2/7} - T_0 \right)$$

$$= \frac{T_0}{\alpha} \left(1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{2/7} \right)$$

(ใช้คำตอบข้อ 2.2)

ตอนที่ 2 อากาศชื้น

[7 คะแนน]

2.5 SOLUTION

เมื่อแก๊สได้รับความร้อน Q จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายใน $\Delta U = (5/2)nR\Delta T$ และทำงาน $p\Delta V$ โดยที่ ΔT และ ΔV เป็นการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิและการเปลี่ยนแปลงปริมาตรเล็ก ๆ ตามลำดับ จากกฎข้อหนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์

$$\begin{aligned} Q &= \frac{5}{2}nR\Delta T + p\Delta V \\ &= \frac{5}{2}nR\Delta T + (nR\Delta T - V\Delta p) \\ &= \frac{7}{2}nR\Delta T - V\Delta p \end{aligned}$$

2.6 SOLUTION

สมมติให้อากาศประกอบด้วยส่วนที่เป็นแก๊สอุดมคติและส่วนที่เป็นไอน้ำ มวลของไอน้ำ $-\Delta m_v$ ($\Delta m_v < 0$) จะควบแน่นกลายเป็นหยดน้ำ และคายความร้อนขนาด $Q = -L_v\Delta m_v$ ให้กับส่วนที่เป็นแก๊สอุดมคติ ดังนั้นความร้อนที่แก๊สอุดมคติได้รับคือ

$$\begin{aligned} -L_v\Delta m_v &= \frac{7}{2}nR\Delta T - V\Delta p \\ \frac{7}{2}nR\Delta T &= V\Delta p - L_v\Delta m_v \\ \Delta T &= \frac{2V}{7nR}\Delta p - \frac{2}{7nR}L_v\Delta m_v \\ &= \frac{2T}{7P}\Delta p - \frac{2\mu}{7m_{gas}R}L_v\Delta m_v \\ &= \frac{2T}{7P}\Delta p - \frac{2\mu}{7R}L_v\left(\frac{\Delta m_v}{m_{gas}}\right)_{\Delta\beta} \\ &= \frac{2T}{7P}\Delta p - \frac{2\mu}{7R}L_v\Delta\beta \end{aligned}$$

โดยการเขียน $\Delta p = (dp/dz)\Delta z = -\rho g\Delta z$ สมการด้านบนจะกลายเป็น

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{2T}{7p}(-\rho g\Delta z) - \frac{2\mu}{7R}L_v\Delta\beta \\ &= -\frac{2g\rho T}{7p}\Delta z - \frac{2\mu}{7R}L_v\Delta\beta \\ &= -\frac{2g\mu}{7R}\Delta z - \frac{2\mu}{7R}L_v\Delta\beta \quad \left(\frac{T}{p} = \frac{\mu}{\rho R}\right) \\ &= -\alpha\Delta z - \frac{\alpha L_v}{g}\Delta\beta \quad \left(\alpha = \frac{2g\mu}{7R}\right) \end{aligned}$$

สำหรับการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ $\Delta T = T_2 - T_1$ และการเปลี่ยนแปลงความสูง $\Delta z = z_2 - z_1$ สมการข้างบนบรรยายการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของอากาศชื้น

$$T_2 - T_1 = \underbrace{-\alpha(z_2 - z_1)}_{\text{dry adiabatic expansion}} - \underbrace{\frac{\alpha L_v}{g}\Delta\beta}_{\text{condensation}}$$

โดยที่ $\Delta\beta = \beta(T_2) - \beta(T_1)$ ซึ่งสามารถหาได้จากกราฟในรูปที่ 2 การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของอากาศขึ้นในสมการนี้มาจาก 2 ส่วน ส่วนแรกเป็นผลจากการขยายตัวของอากาศแบบ adiabatic เช่นเดียวกับอากาศแห้ง และส่วนที่สองเป็นเทอมแก้ไขซึ่งเป็นผลจากการควบแน่นของไอน้ำ

2.7 SOLUTION

เมื่ออากาศแห้งลอยตัวสูงขึ้นจากพื้นดินและขยายตัวแบบ adiabatic อุณหภูมิเปลี่ยนจาก T_0 เป็น $T_1 = T_0(p_1/p_0)^{2/7}$ (ข้อ 2.2) และความสูงเพิ่มจาก $z = 0$ เป็น $z = z_1 = (T_0/\alpha)[1 - (p_1/p_0)^{2/7}]$ (ข้อ 2.4) เมื่อแทนค่าต่าง ๆ จะได้

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{2/7} = (293) \left(\frac{84.2}{100} \right)^{2/7} = 279 \text{ K } (5.95^\circ\text{C})$$

และ

$$z_1 = \frac{T_0}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{2/7} \right] = \frac{293}{9.78 \times 10^{-3}} \left[1 - \left(\frac{84.2}{100} \right)^{2/7} \right] = 1.44 \times 10^3 \text{ m}$$

จากสมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของอากาศขึ้น ถ้าเราพิจารณาเทอมที่เป็นการขยายตัวแบบ adiabatic เราจะสามารถหา z_2 ได้จากสมการคล้ายกับสมการด้านบน

$$z_2 = \frac{T_0}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{2/7} \right] = \frac{293}{9.78 \times 10^{-3}} \left[1 - \left(\frac{70.0}{100} \right)^{2/7} \right] = 2.90 \times 10^3 \text{ m}$$

2.8 SOLUTION

จาก $T_1 = 5.95^\circ\text{C}$ เมื่อพิจารณากราฟจะพบว่า $\beta(T_1) = 6.0 \times 10^{-3}$ จากนั้นแทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของอากาศขึ้น

$$T_2 - T_1 = -\alpha(z_2 - z_1) - \frac{\alpha L_v}{g} \Delta\beta$$

$$T_2 = T_1 - \alpha(z_2 - z_1) - \frac{\alpha L_v}{g} [\beta(T_2) - \beta(T_1)]$$

$$T_2 = 5.95^\circ\text{C} - (9.78 \times 10^{-3})(2.90 - 1.44) \times 10^3 - \frac{(9.78 \times 10^{-3})(2.5 \times 10^6)}{9.81} [\beta(T_2) - (6.0 \times 10^{-3})]$$

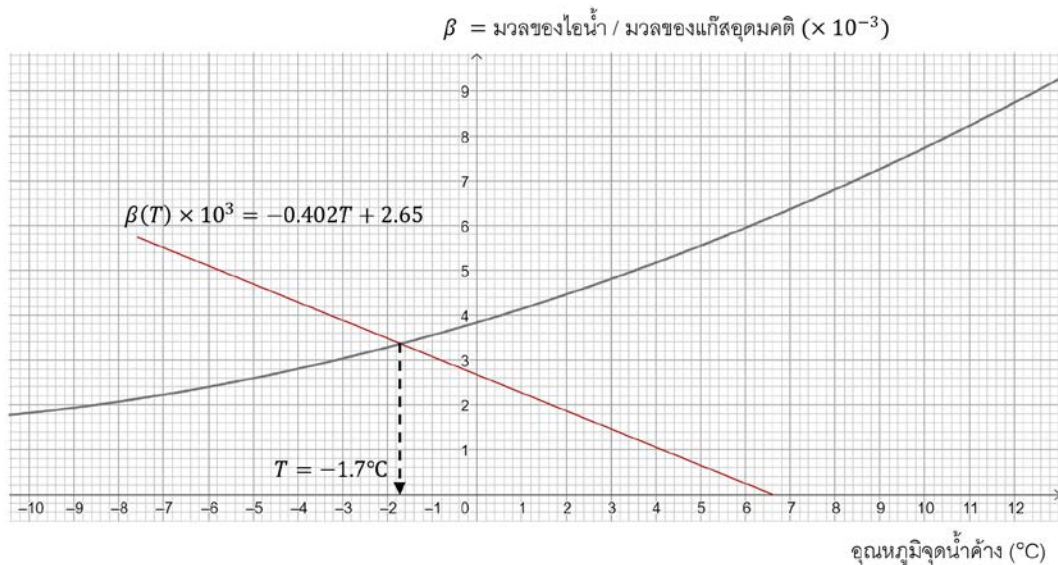
$$T_2 = -8.33^\circ\text{C} - 2.49 \times 10^3 [\beta(T_2) - (6.0 \times 10^{-3})]$$

$$T_2 = -8.33^\circ\text{C} - 2.49[\beta(T_2) \times 10^3] + 14.9^\circ\text{C}$$

$$2.49[\beta(T_2) \times 10^3] = -T_2 + 6.61^\circ\text{C}$$

$$\beta(T_2) \times 10^3 = -0.402T_2 + 2.65$$

สมการนี้เป็นสมการเส้นตรง เมื่อลากเส้นตรงนี้บนกราฟในรูปที่ 2 เราสามารถหาจุดตัดและอ่านค่าอุณหภูมิได้ $T_2 = -1.7^\circ\text{C}$



2.9 SOLUTION

คำนวณอัตราเฉลี่ยของการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิตามความสูงของอากาศขึ้น

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{\Delta z} &= \frac{T_2 - T_1}{z_2 - z_1} \\ &= \frac{-1.7 - 5.95}{(2.90 - 1.44) \times 10^3} \\ &= -5.2^\circ\text{C} \cdot \text{km}^{-1} \end{aligned}$$

ซึ่งมีค่าประมาณครึ่งหนึ่งของอัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของอากาศแห้ง