

เฉลยข้อที่ 1

[10 คะแนน]

1.1 หยดน้ำและไฟกระพริบ

[5 คะแนน]

a.) SOLUTION

หยดถัดไปเคลื่อนที่เข้าไปแทนที่หยดก่อนหน้า ที่ตำแหน่งเดียวกัน ในจังหวะที่ไฟสว่างพอดีเนื่องจากคาบเท่ากัน จึงทำให้เห็นเสมือนกับว่าหยดน้ำอยู่ที่เดิม

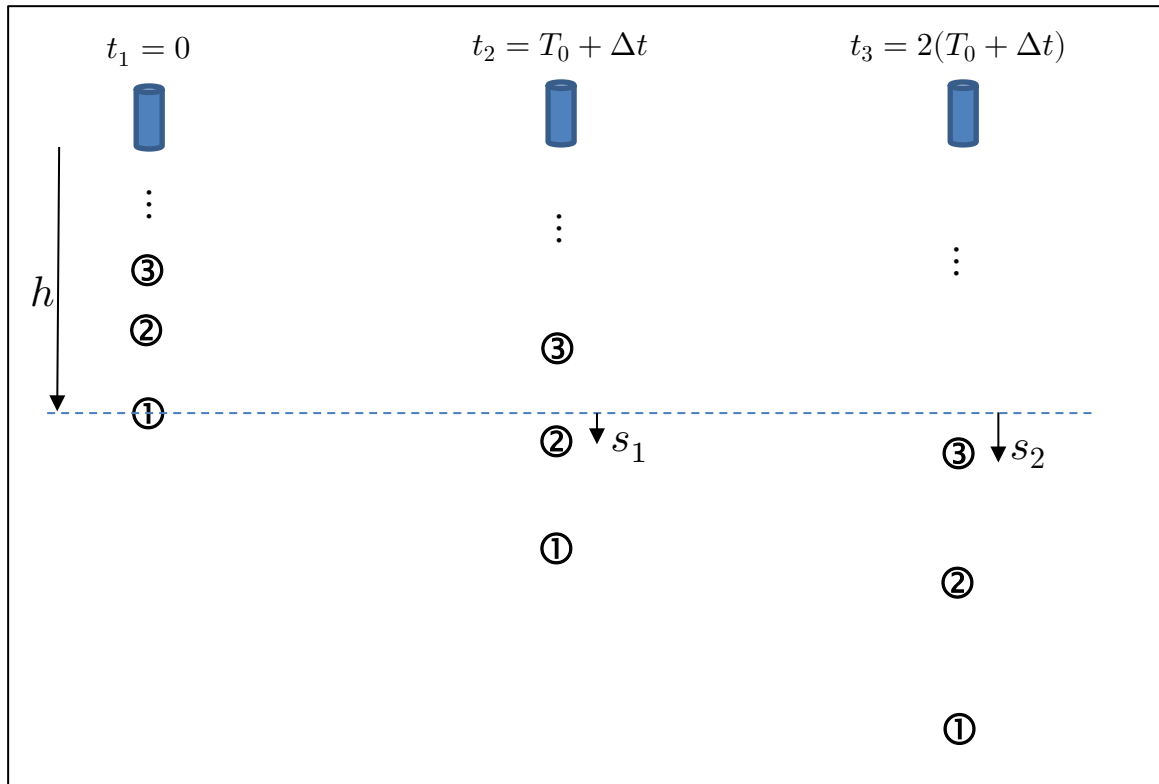
หรือ

เป็นตำแหน่งปรากฏแบบเดียวกับการมองผ่าน stroboscope ที่คาบเท่ากัน

b.) SOLUTION

เมื่อ $\Delta t \neq 0$ หยกน้ำจะไม่ปรากฏที่ตำแหน่งเดิม แต่จะมีการเลื่อนไปเล็กน้อย

พิจารณาหยดหนึ่ง ① ที่ผ่านตำแหน่ง h ที่เวลา $t = t_1 = 0$ และเป็นจังหวะที่ไฟสว่าง
หยดนี้มีความเร็วจริงเท่ากับ g และมีความเร็วจริงเท่ากับ $u_h = \sqrt{2gh}$



หยดถัดไป ② จะเคลื่อนที่มาที่ตำแหน่ง h เมื่อเวลาผ่านไป T_0 พอดี (แต่ไฟยังมืด) และจะเคลื่อนที่ต่อไป ได้การกระจัดปรากฏ s_1 หลังจากเวลาผ่านไปอีก Δt เมื่อไฟสว่างที่เวลา $t_2 = T_0 + \Delta t$

การกระจัดปรากฏของหยด ② จึงเท่ากับ $s_1 = u_h \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2$

หยดถัดไป ③ จะเคลื่อนที่มาที่ตำแหน่ง h เมื่อเวลาผ่านไป $2T_0$ พอดี (แต่ไฟยังมืด) และจะเคลื่อนที่ต่อไป ได้การกระจัดปรากฏ s_2 หลังจากเวลาผ่านไปอีก $2\Delta t$ เมื่อไฟสว่างที่เวลา $t_3 = 2(T_0 + \Delta t)$

การกระจัดปรากฏของหยด ③ จึงเท่ากับ $s_2 = u_h (2\Delta t) + \frac{1}{2} g (2\Delta t)^2$

เมื่อถึงจุดนี้ สามารถพิจารณาต่อได้ 2 แบบคือ

แบบที่ 1: แบบทั่วไป

หรือเมื่อพิจารณา step ที่ n ที่เวลา $t = n(T_0 + \Delta t)$ จะได้ว่า

$$s_n = u_n(n\Delta t) + \frac{1}{2}g(n\Delta t)^2 \text{ เมื่อแทนค่า } n \text{ จะได้}$$

$$s_n = u_n \left(\frac{\Delta t}{T_0 + \Delta t} \right) t + \frac{1}{2}g \left(\frac{\Delta t}{T_0 + \Delta t} \right)^2 t^2 \text{ ซึ่งเป็นสมการการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว ดังนั้น ความเร็วปรากฏ}$$

$$u' = u_n \frac{\Delta t}{T_0 + \Delta t} = \frac{\sqrt{2gh\Delta t}}{T_0 + \Delta t}$$

และความเร่งปรากฏ

$$a' = g \left(\frac{\Delta t}{T_0 + \Delta t} \right)^2$$

แบบที่ 2: สมมติให้เคลื่อนที่แบบความเร่งปรากฏคงตัว

ให้ความเร็วปรากฏเป็น u' และ ความเร่งปรากฏเป็น a' จะได้ว่า

$$s_1 = u_n \Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t^2 = u'(T_0 + \Delta t) + \frac{1}{2}a'(T_0 + \Delta t)^2 \text{ และ}$$

$$s_2 = u_n(2\Delta t) + \frac{1}{2}g(2\Delta t)^2 = u'(2T_0 + 2\Delta t) + \frac{1}{2}a'(2T_0 + 2\Delta t)^2$$

เมื่อแก้สมการจะได้

$$u' = u_n \frac{\Delta t}{T_0 + \Delta t} = \frac{\sqrt{2gh\Delta t}}{T_0 + \Delta t}$$

และ

$$a' = g \left(\frac{\Delta t}{T_0 + \Delta t} \right)^2$$

c.) SOLUTION

เมื่อ $t = 0$ จะเห็นหยดน้ำอยู่นิ่งกับที่ (ความเร็วปรากฏเป็นศูนย์) และจะเริ่มเคลื่อนที่ลงเมื่อ $t > 0$ หลังจากนั้นจะหยุดนิ่งอีกครั้งที่เวลา $t = \pi/\omega$ ก่อนจะเคลื่อนที่ขึ้น แล้วมาหยุดนิ่งที่ตำแหน่งตั้งต้นเมื่อ $t = 2\pi/\omega$

การคิดแอมพลิจูด

ค่าแอมพลิจูดหาจากระยะเคลื่อนที่ปรากฏจากเวลา $t = 0$ ถึง $t = \pi/2\omega$ หรือ คิดจากครึ่งหนึ่งของระยะปรากฏจาก $t = 0$ ถึง $t = \pi/\omega$ (หยุดนิ่ง $\rightarrow$ หยุดนิ่ง)

ความเร็วสุดท้าย Terminal Velocity

ระยะระหว่างหยด d_0 และเวลาระหว่างหยด T_0 ดังนั้น Terminal Velocity $u_0 = d_0/T_0$ (ความเร็วจริง ไม่ใช่ความเร็วปรากฏ)

ระยะทางปรากฏที่เคลื่อนที่ เมื่อความเร่งเป็นศูนย์

แบบ 1. ใช้ประโยชน์จากความเร็วปรากฏในข้อ b.

ระยะปรากฏ $\Delta s = \int u' dt$ เมื่อความเร็วปรากฏ $u' = u_0 \Delta t / (T_0 + \Delta t)$ โดยการเลียนแบบจากข้อ b. เมื่อ $\Delta t = \tau \sin \omega t$ ดังนั้น

$$\Delta s = \int_{t=0}^t u_0 \frac{\Delta t}{T_0 + \Delta t} dt \approx \int_{t=0}^t u_0 \frac{\tau \sin \omega t}{T_0} dt$$

ซึ่งได้

$$\Delta s = \frac{u_0 \tau}{\omega T_0} - \frac{u_0 \tau}{\omega T_0} \cos \omega t$$

แสดงว่าแอมพลิจูด

$$A = \frac{u_0 \tau}{\omega T_0}$$

หรือคิดจาก

$$A = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2\omega}} u_0 \frac{\Delta t}{T_0 + \Delta t} dt \approx \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2\omega}} u_0 \frac{\tau \sin \omega t}{T_0} dt$$

ได้คำตอบ $A = u_0 \tau / T_0 \omega$ เช่นเดียวกัน

แทนค่า u_0 จะได้

$$A = \frac{d_0 \tau}{T_0^2 \omega}$$

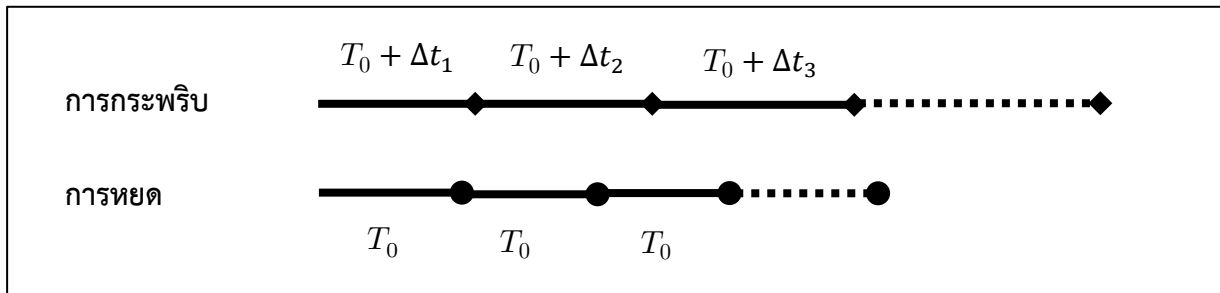
แบบ 2. คำนวณโดยตรง

เวลาที่เข้ามาของการกระพริบครั้งที่ 1 เท่ากับ $\Delta t_1 \approx \tau \sin \omega(T_0)$

เวลาที่เข้ามาของการกระพริบครั้งที่ 2 เท่ากับ $\Delta t_2 \approx \tau \sin \omega(2T_0)$

เวลาที่เข้ามาของการกระพริบครั้งที่ 3 เท่ากับ $\Delta t_3 \approx \tau \sin \omega(3T_0)$

...ตามลำดับ...



ระยะปรากฏ $s = u_0 \sum \Delta t_n$ เมื่อ u_0 เป็นความเร็ว terminal velocity (ความเร็วจริง) และ $\sum \Delta t_n$ เป็นเวลาส่วนเกินที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ปรากฏ (เหมือนกับข้อ b.)

จำนวนหยดจาก $t = 0$ ถึง $t = \pi/2\omega$ เท่ากับ $N = \pi/2\omega T_0 \gg 1$ ดังนั้น

$$A = u_0 \sum_{n=1}^{n=N} \tau \sin n\omega T_0$$

แทนค่า $\theta = \omega T_0$ ได้คำตอบ

$$A = \frac{u_0 \tau \sin \left(N \frac{\omega T_0}{2} \right) \sin \left((N+1) \frac{\omega T_0}{2} \right)}{\sin \frac{\omega T_0}{2}} \approx \frac{u_0 \tau}{\omega T_0}$$

แทนค่า u_0 จะได้

$$A = \frac{d_0 \tau}{T_0^2 \omega}$$

หมายเหตุ

นักเรียนสามารถค้นหาลิขสิทธิ์ปรากฏการณ์นี้ใน YouTube ด้วยคำว่า “strobe light water drops”

1.2 แหนบเชิงแสง

[5.0 คะแนน]

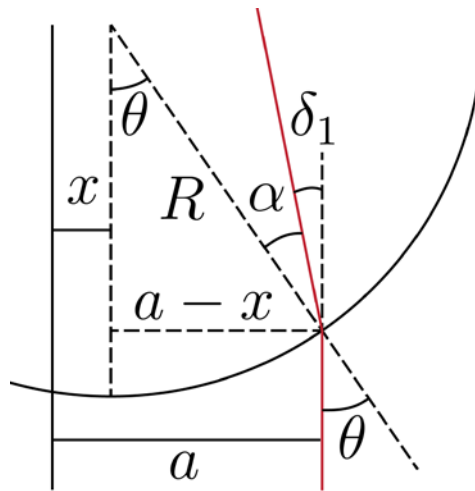
a) จงหาค่ามุมเบี่ยงเบน δ ของลำแสง A ในรูปของ x และค่าคงที่อื่นที่โจทย์กำหนด

ให้มุมตกกระทบเป็น θ และมุมหักเหเป็น α จากกฎของสเนลล์จะได้ว่า

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \alpha \rightarrow \sin \theta = n \sin \alpha$$

เนื่องจาก $a, x \ll R$ จะได้ว่ามุม $\theta, \alpha \ll 1$ ทำให้ค่า $\sin x \approx x$ และ

$$\theta = n\alpha$$



การหามุมเบี่ยงเบนทำได้จากการพิจารณาผลรวมของมุมเบี่ยงเบนที่เกิดจากการหักเหแต่ละครั้ง โดยที่มุมเบี่ยงเบนที่เกิดจากการหักเหที่ผิวล่างและบนนั้นมีค่าเท่ากันคือ

$$\delta_1 = \theta - \alpha = \left(\frac{n-1}{n}\right) \theta$$

ดังนั้นมุมเบี่ยงเบนรวมทั้งหมดคือ

$$\delta = 2\delta_1 = 2\left(\frac{n-1}{n}\right) \theta$$

จากรูปด้านบนจะได้ว่า

$$\sin \theta = \frac{a-x}{R} \approx \theta$$

เมื่อนำค่า θ ไปแทนในมุมเบี่ยงเบนจะได้

$$\delta = 2\delta_1 = 2\left(\frac{n-1}{n}\right) \left(\frac{a-x}{R}\right)$$

b) จงหาจำนวนของโฟตอนของลำแสง A ที่วิ่งเข้าสู่ลูกแก้วในช่วงเวลา Δt

ในช่วงเวลา Δt นั้นพลังงานของแสงที่วิ่งเข้าสู่ลูกแก้วจะมีค่าเป็น $P\Delta t$ เนื่องจากโฟตอนแต่ละตัวมีพลังงานเป็น hc/λ จำนวนโฟตอนที่วิ่งเข้าสู่ลูกแก้วในช่วงเวลาดังกล่าวมีค่าเป็น

$$\Delta n_{\text{photon}} = \frac{P\Delta t}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{P\lambda}{hc} \Delta t$$

c) จงหาขนาดของโมเมนตัมที่ถูกส่งเข้าสู่ลูกแก้วด้วยโฟตอนของลำแสง A ในช่วงเวลา Δt

เนื่องจากโฟตอนแต่ละอนุภาคมีโมเมนตัม h/λ ดังนั้นขนาดโมเมนตัมที่ถูกส่งผ่านสู่ลูกแก้วคือ

$$\Delta p_{\text{in}} = \frac{h}{\lambda} \Delta n_{\text{photon}} = \frac{P\Delta t}{c}$$

d) หาแรงที่ลำแสง A ทำกับลูกแก้ว

อันดับแรกเราพิจารณาแรงที่ลูกแก้วกระทำกับลำแสง ซึ่งสามารถหาได้จากอัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมของแสงจากก่อนวิ่งเข้าสู่ลูกแก้วและหลังจากวิ่งออกจากลูกแก้ว

สำหรับในแนวแกน y ในช่วงเวลา Δt

$$\text{โมเมนตัมของแสงที่วิ่งเข้าสู่ลูกแก้วคือ } \Delta p_{\text{in}}^y = \frac{P\Delta t}{c}$$

$$\text{โมเมนตัมของแสงที่วิ่งออกจากลูกแก้วคือ } \Delta p_{\text{out}}^y = \frac{P\Delta t}{c} \cos \delta$$

ดังนั้นโมเมนตัมที่ไปเปลี่ยนไปของแสงในแนวแกน y ในช่วงเวลา Δt คือ

$$\Delta p_{\text{laser}}^y = \frac{P}{c} (\cos \delta - 1) \Delta t \approx 0$$

สำหรับในแนวแกน x ในช่วงเวลา Δt

$$\text{โมเมนตัมของแสงที่วิ่งเข้าสู่ลูกแก้วคือ } \Delta p_{\text{in}}^x = 0$$

$$\text{โมเมนตัมของแสงที่วิ่งออกจากลูกแก้วคือ } \Delta p_{\text{out}}^x = -\frac{P\Delta t}{c} \sin \delta$$

ดังนั้นโมเมนตัมที่ไปเปลี่ยนไปของแสงในแนวแกน x ในช่วงเวลา Δt คือ

$$\Delta p_{\text{laser}}^x = -\frac{P}{c} \sin \delta \Delta t \approx -\frac{P}{c} \delta \Delta t = -2 \frac{P}{c} \left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{a-x}{R} \right) \Delta t$$

จากกฎข้อที่สามของนิวตัน เราจะได้ว่าแรงที่แสงทำต่อลูกแก้วนั้นมีขนาดเท่ากันแต่ทิศตรงข้าม ซึ่งคือ

$$\vec{F}_A = -\frac{\Delta p_{\text{laser}}^x}{\Delta t} \hat{x} = 2 \frac{P}{c} \left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{a-x}{R} \right) \hat{x}$$

e) หาความถี่ของการสั่นของลูกแก้ว

สำหรับลำแสง B ค่ามุมเบี่ยงเบนนั้นจะสามารถเขียนได้อยู่ในรูปเดียวกับลำแสง A นั่นคือ

$$\delta_B = 2 \left(\frac{n-1}{n} \right) \theta_B$$

โดยที่มุมตกกระทบ θ_B มีค่าเป็น $\theta_B = \frac{a+x}{R}$ ดังนั้นมุมเบี่ยงเบนคือ

$$\delta_B = 2 \left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{a+x}{R} \right)$$

ดังนั้นแรงที่ลำแสง B กระทำต่อลูกแก้วคือ

$$\vec{F}_B = \frac{P}{c} \sin \delta_B (-\hat{x}) = 2 \frac{P}{c} \left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{a+x}{R} \right) (-\hat{x})$$

จะเห็นว่าทิศที่ได้ของแรงจะตรงข้ามกับแรงจากลำแสง A เนื่องจากแสงเบี่ยงเบนในทิศตรงกันข้าม

แรงลัพธ์ที่กระทำต่อลูกแก้วเนื่องจากลำแสงทั้งสองคือ

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_B + \vec{F}_A = -4 \frac{P}{c} \left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{x}{R} \right) \hat{x}$$

จาก $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$ เราได้ว่า

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4P}{mcR} \left(\frac{n-1}{n} \right) x = -\omega^2 x$$

แสดงว่า

$$\omega^2 = \frac{4P}{mcR} \left(\frac{n-1}{n} \right)$$