หน่วยที่ 3 การกวัดแกว่ง

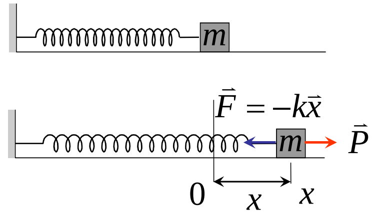
ตอนที่ 3.1 การแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

ตอนที่ 3.2 ระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

ตอนที่ 3.1การแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

- สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว
- แนวเทียบวงกลมอ้างอิงกับฮาร์มอนิกเชิงเดียว
- พลังงานของตัวแกว่งกวัด

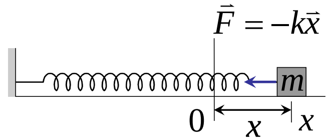
สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว



การเคลื่อนที่แบบนี้เรียกว่า

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

(simple harmonic motion) SHM



กฎของฮุก (Hooke's law)

$$\boxed{\vec{F} = -k\vec{x}}$$

k คือค่าคงตัวของสปริงมีหน่วยเป็นนิวตันต่อเมตร (N/m)

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

ในกรณี 1 มิติ

$$-kx = ma$$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0} \qquad \boxed{\omega^2=\frac{k}{m}}$$

สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

$$x(t)=???$$

เดาคำตอบ

$$\boxed{x(t)=A\sin(\omega t+\phi)} \quad \text{หรือ} \quad \boxed{x(t)=A\cos(\omega t+\phi)}$$

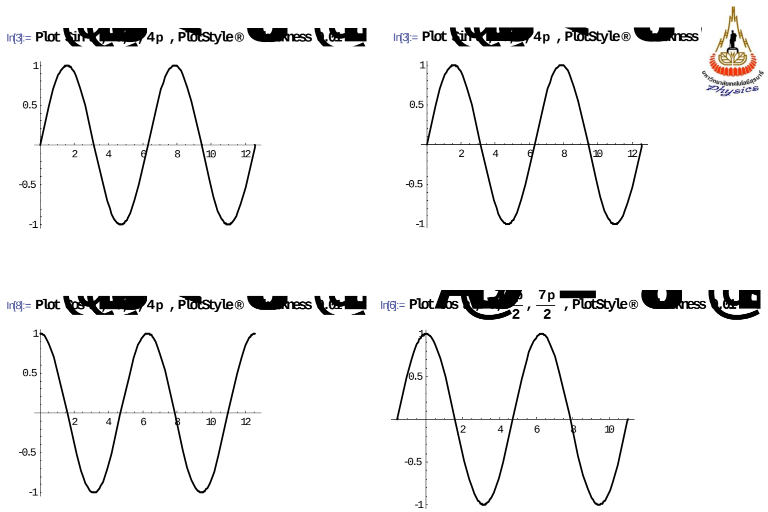
A แอมปลิจูด

ω ความถี่เชิงมุม เรเดียน ต่อ วินาที (rad/s)

$\omega t+\phi$ มุมเฟส

ϕ เฟสเริ่มต้น

ถูกกำหนดด้วย การกระจัด และความเร็ว ในตอนเริ่มต้น



การกระจัด $\boxed{x(t)=A\sin(\omega t+\phi)}$

ความเร็ว $$v(t)=\frac{dx}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\phi)$$

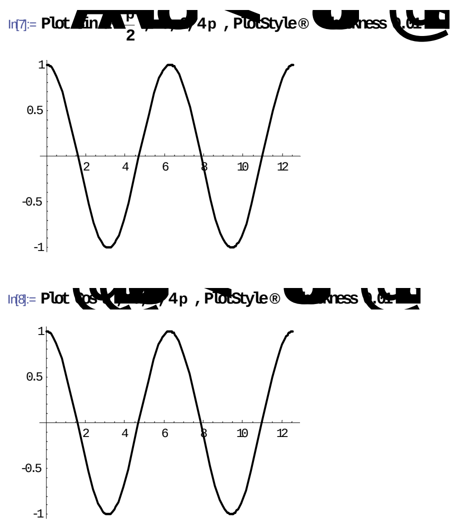
$$\boxed{v(t)=A\omega\cos(\omega t+\phi)}$$

ความเร่ง $$a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\sin(\omega t+\phi)$$

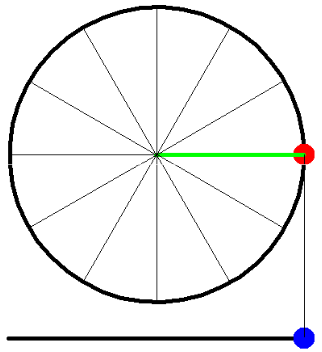
$$\boxed{a(t)=-A\omega^2\sin(\omega t+\phi)}$$

$$a(t)=-\omega^2A\sin(\omega t+\phi)$$

$$a(t)=-\omega^2x(t)$$



แนวเทียบวงกลมอ้างอิงกับฮาร์มอนิกเชิงเดียว



http://www.physics.uoguelph.ca/tutorials/shm/phase0.html

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

พลังงานจลน์ $\frac{1}{2}mv^2$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[-A\omega\sin(\omega t + \phi)]^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

พลังงานจลน์มีค่าสูงสุดเท่ากับ $\frac{1}{2}kA^2$ ณ ตำแหน่งสมดุล

พลังงานจลน์มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 0 ณ ตำแหน่งที่มีการกระจัดเป็น $\pm A$

พลังงานของตัวแกว่งกวัด

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

ระบบประกอบด้วยพลังงานศักย์ และพลังงานจลน์

พลังงานศักย์

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k[A\cos(\omega t + \phi)]^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

พลังงานศักย์มีค่าสูงสุดเท่ากับ $\frac{1}{2}kA^2$ ณ ตำแหน่งที่มีการกระจัดเป็น $\pm A$

พลังงานศักย์มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 0 ณ ตำแหน่งสมดุล

พลังงานศักย์ $E_p(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$

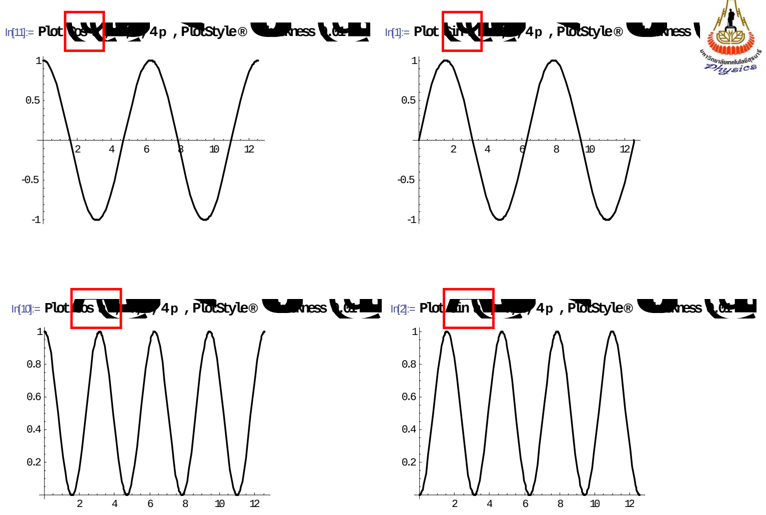
พลังงานจลน์ $E_k(t) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$

พลังงานรวม

$$E = E_p(t) + E_k(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2\left[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)\right]$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}kA^2}$$



พลังงานศักย์

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E_{p,MAX} = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_{p,MIN} = 0$$

$$E_{p,AVE} = \frac{1}{2}kA^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}kA^2$$

พลังงานจลน์

$$E_k(t) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

$$E_{k,MAX} = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_{k,MIN} = 0$$

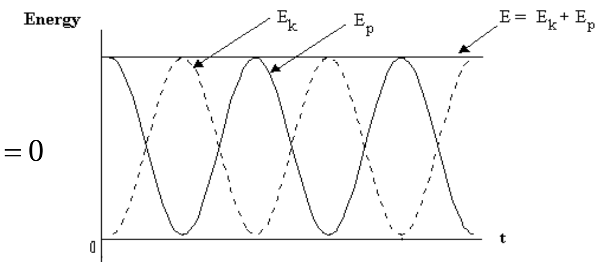
$$E_{k,AVE} = \frac{1}{2}kA^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}kA^2$$

พลังงานศักย์ $E_p(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$

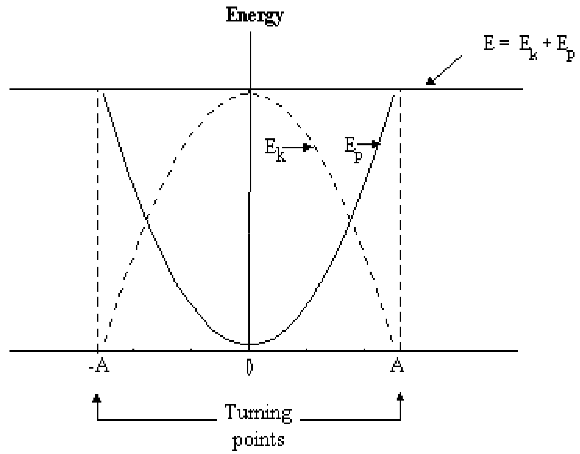
พลังงานจลน์ $E_k(t) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}kA^2}$$

$$\phi = 0$$



กราฟแสดงพลังงานจลน์ พลังงานศักย์ และพลังงานรวมที่เป็นฟังก์ชันของเวลา



กราฟแสดงพลังงานจลน์ พลังงานศักย์ และพลังงานรวมที่เป็นฟังก์ชันการกระจัด

ตัวอย่างที่ 1 การเคลื่อนที่แบบ SHM ซึ่งแทนด้วยสมการ

$$x(t) = 5\sin\left(20t - \frac{\pi}{3}\right)$$

โดยที่ ***x*** มีหน่วยเป็นเมตร ***t*** มีหน่วยเป็นวินาที และเฟสมีหน่วยเป็นเรเดียน

จงคำนวณหา

1. ความถี่
2. คาบ
3. การกระจัดสูงสุด
4. อัตราเร็วสูงสุด
5. อัตราเร่งสูงสุด
6. การกระจัด อัตราเร็ว และอัตราเร่ง ที่เวลา $t = 0$ และ $t = \frac{\pi}{40}$ วินาที

ตัวอย่างที่ 2 มวล 1 กิโลกรัมเคลื่อนที่แบบ SHM ด้วยแอมพลิจูด 0.05 เมตร และคาบ 5 วินาที จงหา

1. อัตราเร็วของมวลที่จุดซึ่งห่างจากจุดกึ่งกลางของการแกว่งกวัดเป็นระยะ 0.03 เมตร มีค่าเป็นเท่าใด
2. พลังงานศักย์ที่จุดซึ่งอยู่ห่างจากจุดกึ่งกลางของการกวัดแกว่งเป็นระยะ 0.03 เมตรมีค่ากี่จูล

1) $1.6\pi \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s}$

2) $0.72\,\pi^2 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}$

ตัวอย่างที่3 มวล m = 2.0 kg ติดที่ปลายสปริงเบา เมื่อออกแรง F = 20.0 N ดึงที่ปลายทำให้สปริงยืดออกเป็นระยะ x(0) = 40 cm หลังจากนั้นเริ่มจับเวลาพร้อมกับปล่อยให้มวลเคลื่อนที่ และถ้าไม่มีแรงเสียดทานในการเคลื่อนที่ และกำหนดให้สมการแสดงตำแหน่งของมวลที่เวลาใดๆคือ $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ จงหา

- ค่าคงตัว (k) ของสปริง
- อัมพลิจูด (A)
- ความถี่เชิงมุม (ω)
- มุมเฟส (ϕ) เริ่มต้น
- จงหาความเร็วสูงสุดในการเคลื่อนที่ของมวลที่ปลายสปริงนี้
- จงหาพลังงานรวมของระบบ

หน่วยที่ 3 การกวัดแกว่ง

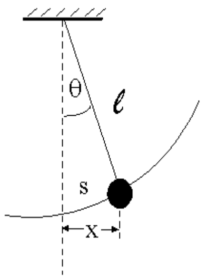
ตอนที่ 3.1 การแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

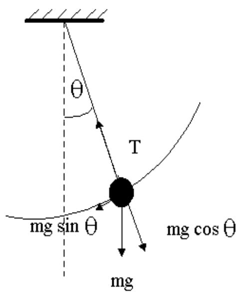
ตอนที่ 3.2 ระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

ตอนที่ 3.2 ระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

- ลูกตุ้มเชิงเดียว

ลูกตุ้มเชิงเดียว





$$F_t = -mg\sin\theta$$

$$F_t = ma = m\frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$s = l\theta$$

$$F_t = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

เนื่องจาก

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$$

พิจารณาการสั่นที่มีมุมแคบ ๆ

$$\boxed{\sin\theta \approx \theta}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

พิจารณาการสั่นที่มีมุมแคบ ๆ $\boxed{\sin\theta \approx \theta}$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}} \qquad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

ตัวอย่างที่ 1 ลูกตุ้มเชิงเดียวมีคาบของการแกว่งกวัดเป็น 2.50 วินาทีจงหา

1. ความยาวของเชือกเส้นนี้
2. จงหาคาบของการแกว่งของลูกตุ้มเชิงเดียวเมื่ออยู่บนดวงจันทร์

กำหนดให้ $g_M = 1.67\, m/s^2$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาความถี่และคาบ ของลูกตุ้มเชิงเดียวที่มีความยาวเชือกเป็น 10 เมตร $(g = 10\, m/s^2)$