หน่วยที่ 10 พลศาสตร์ของของไหล

ตอนที่ 10.1 สมการแห่งการต่อเนื่องและสมการแบร์นูลลี

ตอนที่ 10.2 การประยุกต์สมการแห่งการต่อเนื่อง และสมการแบร์นูลลี

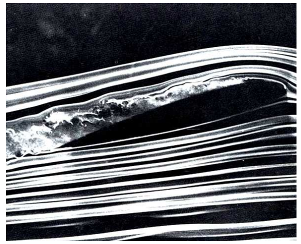
ตอนที่ 10.3 ความหนืด

ตอนที่ 10.1 สมการแห่งการต่อเนื่อง และสมการแบร์นูลลี

- สมการแห่งการต่อเนื่อง
- สมการแบร์นูลลี

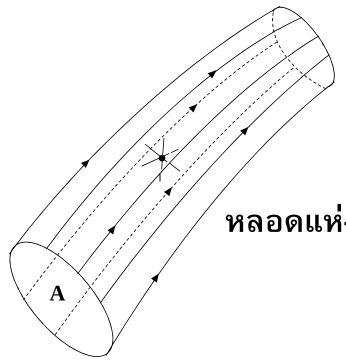
ของไหลแบบที่เป็นของไหลอุดมคติ (ideal fluid) มีสมบัติดังต่อไปนี้

1. ของไหลที่ไม่มีแรงเสียดทานภายในระหว่างชั้นของของไหล
2. ของไหลแบบที่อัดไม่ได้ ความหนาแน่นของของไหลมีค่าคงตัว
3. การไหลแบบคงตัว (steady flow)
   ความเร็ว ความหนาแน่น และความดันที่จุดหนึ่งจุดใดในของของไหลไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา
4. การไหลต้องเป็นการไหลแบบไม่หมุน



มีการหมุนของของไหล

การไหลที่มีการหมุนจะเกิดสภาพปั่นป่วน (turbulence)

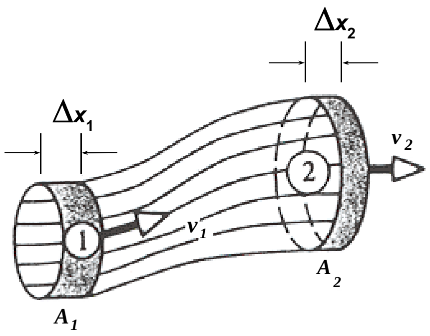


หลอดแห่งการไหล

กรณี**การไหลอย่างมีระเบียบจะ**
ไม่มีการผสมกันระหว่างของไหลในหลอดแห่งการไหลที่อยู่คนละหลอด

สมการแห่งการต่อเนื่อง

พิจารณาการไหลแบบสถานะคงตัว (steady state flow)



หลอดแห่งการไหลที่มีการไหลแบบสถานะคงตัว

$$\Delta M_1 = \Delta M_2$$

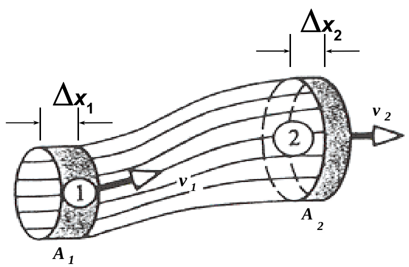
$$\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

สำหรับการไหลคงตัวและเป็นแบบอัดไม่ได้ $\rho_1 = \rho_2$

สมการแห่งการต่อเนื่อง (equation of continuity)

$$\boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2}$$



มวลของของไหลที่**ปลายล่าง**เมื่อเวลาผ่านไป Δt

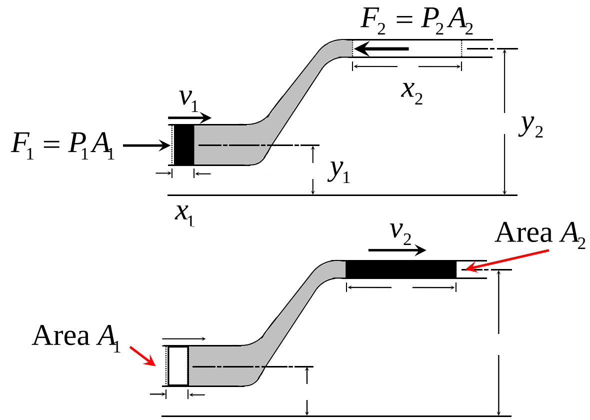
$$\Delta M_1 = \rho_1 A_1 \Delta x_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$$

มวลของไหลที่เคลื่อนที่**ปลายบน**เมื่อเวลาผ่านไป Δt

$$\Delta M_2 = \rho_2 A_2 \Delta x_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

สมการแบร์นูลลี

หลักของอาร์คิมีดีส และหลักของพาสคัลเกี่ยวกับของไหลที่อยู่นิ่ง



แรงที่ปลายล่าง $F_1 = P_1 A_1$

แรง F_1 ทำงาน $W_1 = F_1 x_1 = P_1 A_1 x_1 = P_1 V_1$

แรงที่ปลายบน $F_2 = P_2 A_2$

แรง F_2 ทำงาน $W_2 = -F_2 x_2 = -P_2 A_2 x_2 = -P_2 V_2$

เนื่องจากการไหลเป็นแบบที่อัดไม่ได้

$\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2 = \mathrm{V}$ และ $\mathrm{m}_1 = \mathrm{m}_2 = \mathrm{m}$

งานสุทธิที่กระทำโดยแรง F_1 และแรง F_2

$$W = W_1 + W_2 = P_1 V - P_2 V = (P_1 - P_2)\, V$$

$$P_1 - P_2 = \rho g y_2 - \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\boxed{P + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{ค่าคงตัว}}$$

สมการแบร์นูลลี (Bernoulli Equation)

ผลรวมของความดันและความหนาแน่นพลังงาน (พลังงานจลน์ + พลังงานศักย์) ของของไหลผ่านท่อ จะมีค่าคงตัวเสมอ

พลังงานศักย์ที่เปลี่ยนไป

$$\Delta E_p = mgy_2 - mgy_1$$

พลังงานจลน์ที่เปลี่ยนไป

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

จากทฤษฎีบทงาน พลังงาน

$$(P_1 - P_2)\, V = \Delta E_p + \Delta E_k$$

$$= mgy_2 - mgy_1 + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V$$

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

ในกรณีที่ของไหลอยู่นิ่ง $v_1 = 0, v_2 = 0$

$$P_1 + \rho g y_1 = P_2 + \rho g y_2$$

$$P_1 = P_2 + \rho g (y_2 - y_1)$$

P_2 คือความดันบรรยากาศ P_a

$(y_2 - y_1) = h$

P_1 เรียกใหม่เป็น P

$$P = P_a + \rho g h$$

Khanchai Khosonthongkee

ตัวอย่างที่ 1 ถ้าความเร็วของน้ำในท่อขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 150 มิลลิเมตร เท่ากับ 1.5 เมตร/วินาที ท่อนี้ต่อกับท่อขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 7.5 มิลลิเมตร สมมติว่าน้ำไหลเต็มท่อทั้งสอง จงหา

(a) อัตราการไหล

(b) อัตราเร็วของของเหลวในท่อที่ 2

ตัวอย่างที่ 2 ตอร์ปิโดเส้นผ่านศูนย์กลาง 5 เซนติเมตร นำไปทดสอบในท่อกลมเส้นผ่านศูนย์กลาง 25 เซนติเมตร โดยวางตอร์ปิโดขนานกับแกนท่อ ความเร็วของน้ำที่ผ่านตอร์ปิโดเท่ากับ 2.5 เมตร/วินาที จงหาความเร็วของน้ำที่ไหลผ่านท่อในส่วนที่ไม่มีตอร์ปิโด หน่วยเป็นเมตร/วินาที

หน่วยที่ 10 พลศาสตร์ของของไหล

ตอนที่ 10.1 สมการแห่งการต่อเนื่องและสมการแบร์นูลลี

ตอนที่ 10.2 การประยุกต์สมการแห่งการต่อเนื่องและสมการแบร์นูลลี

ตอนที่ 10.3 ความหนืด

ตอนที่ 10.2 การประยุกต์สมการแห่งการต่อเนื่องและสมการแบร์นูลลี

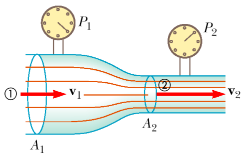
- มาตรเวนทูริ
- ทฤษฎีบทตอร์ริเชลลี
- แรงยกปีกเครื่องบิน
- ปรากฏการณ์แมกนัส

มาตรเวนทูริ

สมการแห่งความต่อเนื่อง $v_1A_1 = v_2A_2$

สมการแบร์นูลลี $P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

ที่ระดับความสูงเดียวกัน $y_1 = y_2$



$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \frac{\left(A_1^2 - A_2^2\right)}{A_2^2}$$

$$\boxed{v_1 = A_2\sqrt{\frac{2\left(P_1 - P_2\right)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}}$$

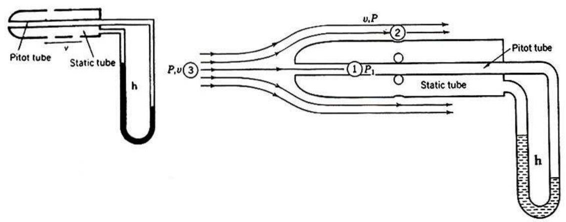
$$v = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}}$$

$$(P_1 - P_2) = \rho_0 g h$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2\rho_0 g h}{\rho}}}$$

ρ_0 ความหนาแน่นของปรอท

หลอดไพทอต



สมการแบร์นูลลี $P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

$y_1 = y_2$

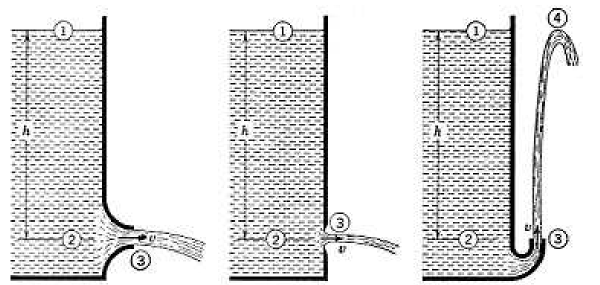
$v_1 = 0$ $\quad P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v^2 \quad v = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}}$

$v_2 = v$

ทฤษฎีบทตอร์ริเชลลี

สมการแบร์นูลลี
(Bernoulli Equation)

$$\boxed{P + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{ค่าคงตัว}}$$



ปากท่อที่มีลักษณะกลมไปตามแนวนอน | ปากท่อที่มีลักษณะคมตามแนวนอน | ปากท่อกลมมีแนวขึ้น

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = P_3 + \rho g y_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2$$

ความดันบรรยากาศที่ผิวของของเหลวและที่ปากท่อมีค่าเท่ากัน)

เราจึงเลือกใช้**ความดันเกจ**

$$0 + \rho g h + 0 = P + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2 \qquad P = \frac{1}{2}\rho v^2$$

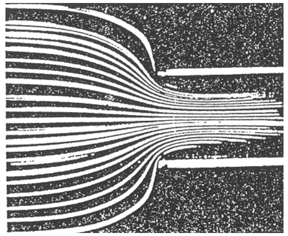
$$\boxed{v = \sqrt{2gh}} \Leftarrow \boxed{\text{ทฤษฎีบทตอร์ริเชลลี}} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2P}{\rho}}}$$

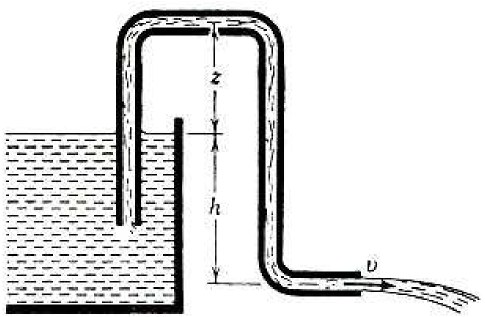
ปากท่อมีลักษณะกลม

อัตราการไหลหาได้จากพื้นที่หน้าตัดคูณด้วยอัตราเร็วของของไหล

ปากท่อคมเล็กน้อย

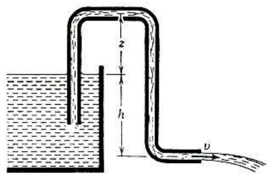
สายกระแสจะลู่เข้า ทำให้พื้นที่หน้าตัดของลำกระแสเมื่อพ้นขอบคมเล็กน้อยจะเล็กลงกว่าพื้นที่หน้าตัดของท่อ ลักษณะของลำกระแสที่มีรูปร่างเช่นนี้เรียกว่า **vena contracta** พื้นที่ของ vena contracta มีค่าประมาณ 65 เปอร์เซ็นต์ของพื้นที่หน้าตัดปากท่อ





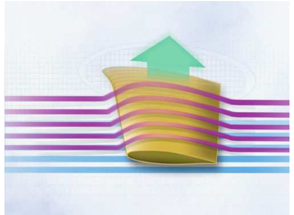
กาลักน้ำ (siphon)

ตัวอย่างที่ 1 จงหาอัตราการไหลที่ปากท่อของกาลักน้ำ ดังรูป ถ้าของเหลวในถังคือน้ำมันมีความหนาแน่น 790 กิโลกรัม/เมตร^3 กำหนดให้ h เท่ากับ 0.4 เมตร และพื้นที่หน้าตัดของท่อเท่ากับ 50 ตารางมิลลิเมตร และความเสียดทานของของไหลมีค่าน้อยมากจนไม่ต้องนำมาคิด



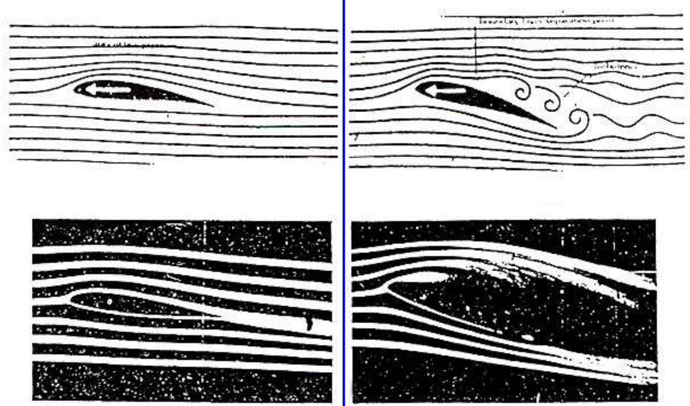
แรกยกปีกเครื่องบิน

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$



ความเร็วเหนือปีก v_2 สูงกว่าความเร็วใต้ปีก v_1 ถ้าให้ P_2 และ P_1 เป็นความดันของอากาศเหนือและใต้ปีกเครื่องบินตามลำดับ และให้พื้นที่ใต้ปีกเครื่องบินเท่ากับ A จากสมการแบร์นูลลีกรณีที่ $y_1 = y_2$

การไหลที่ไม่มีความปั่นป่วน | **การไหลที่มีความปั่นป่วน**



$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\boxed{F_{lift} = (P_1 - P_2)A = \frac{1}{2}\rho A\left(v_2^2 - v_1^2\right)}$$

ตัวอย่างที่ 2 สายกระแสอากาศผ่านปีกเครื่องบินโดยอัตราความเร็วของอากาศเหนือปีกเท่ากับ 120 เมตร/วินาที อัตราเร็วใต้ปีกเท่ากับ 90 เมตร/วินาที ณ ความสูงที่เครื่องบินอยู่นี้อากาศมีความหนาแน่น 0.5 กิโลกรัม/เมตร^3 ถ้าปีกเครื่องบินมีความยาว 10 เมตร และมีความกว้างเฉลี่ยเท่ากับ 2 เมตร จงหา

(a) ความแตกต่างของความดันใต้ปีกและเหนือปีก

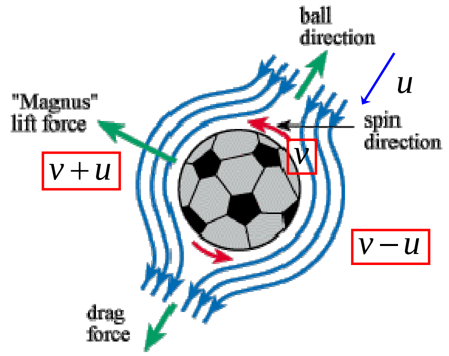
(b) จงหาแรงยกเครื่องบิน

ตัวอย่างที่ 2 ถ้าลมพัดผ่านหลังคาบ้านด้วยความเร็ว 25 เมตร/วินาที จงหาแรงสุทธิที่กระทำบนหลังคาหิน ซึ่งมีพื้นที่ 250 ตารางเมตร กำหนดให้ความหนาแน่นอากาศ 1.28 กิโลกรัม/ลูกบาศก์เมตร หน่วยเป็นนิวตัน

ตัวอย่างที่ 3 ถังเก็บน้ำขนาดใหญ่บรรจุน้ำเต็ม ปรากฏว่าที่ระดับ 16 เมตร ต่ำจากผิวน้ำมีรูรั่วซึ่งมีอัตราการรั่ว 2.5 ลิตร/นาที

1) จงหาอัตราเร็วของน้ำที่ไหลออกจากรูรั่วนี้
2) จงหาเส้นผ่านศูนย์กลางของรู

ปรากฏการณ์แมกนัส



ปรากฏการณ์แมกนัส (Magnus effect)

เช่น การเคลื่อนที่โค้งของลูกเบสบอล ลูกเทนนิส หรือ ฟุตบอล

หน่วยที่ 10 พลศาสตร์ของของไหล

ตอนที่ 10.1 สมการแห่งการต่อเนื่องและสมการแบร์นูลลี

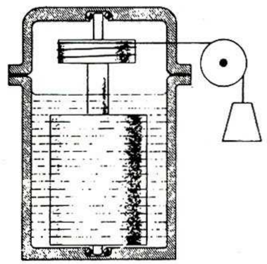
ตอนที่ 10.2 การประยุกต์สมการแห่งการต่อเนื่องและสมการแบร์นูลลี

ตอนที่ 10.3 ความหนืด

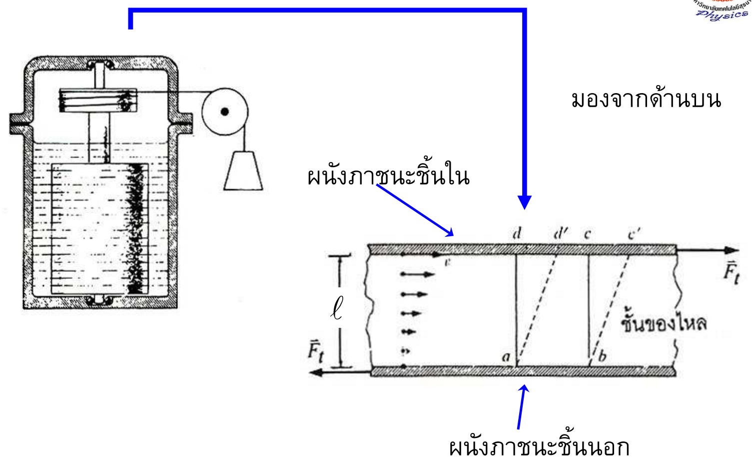
ตอนที่ 10.3 ความหนืด

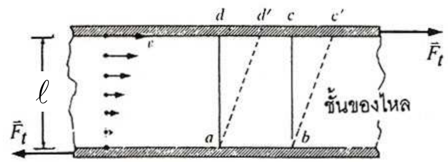
- **ความหนืด**
- **เลขของเรย์โนลด์**
- **กฎของสโตกส์**

ความหนืด



เครื่องมือหาความหนืด

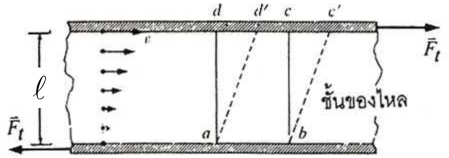




ความเค้นเฉือนที่กระทำแก่ของเหลว $\dfrac{F_t}{A}$

A **คือพื้นผิวของของเหลวที่ถูกแรงกระทำ**

F_t **แรงที่ผิวของของเหลว**



ความเครียดเฉือน $\dfrac{dd'}{ad} = \dfrac{dd'}{\ell}$

อัตราการเปลี่ยนของความเครียดเฉือน $= \dfrac{v}{\ell}$

สัมประสิทธิ์ของความหนืดของของไหลเรียกสั้นๆ ว่า **ความหนืด** (η)

มีนิยามว่า คือ $\dfrac{\text{ความเค้นเฉือน}}{\text{อัตราการเปลี่ยนของความเครียดเฉือน}}$

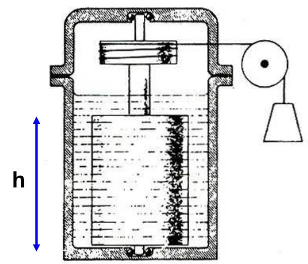
$$\eta = \frac{F}{A} \Big/ \frac{v}{\ell}$$

$$\boxed{\eta = \frac{F\ell}{Av}} \quad \text{หรือ} \quad \boxed{F = \eta A \frac{v}{\ell}}$$

หน่วยในระบบ **SI** $\boxed{\eta}$ มีหน่วย $N \cdot s/m^2 = Pa \cdot s$

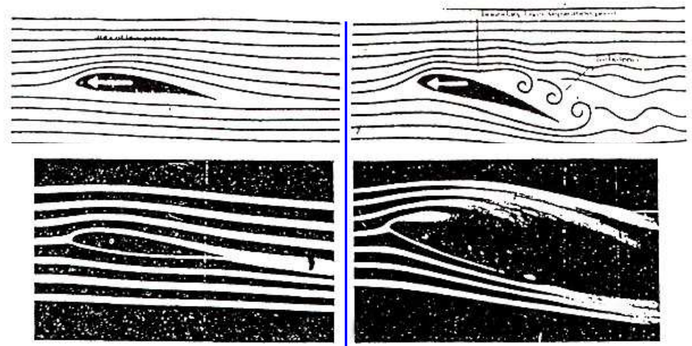
หน่วยที่มักนิยมใช้คือ **poise** หรือ **ปอยส์** $1\text{poise} = 10^{-1} N \cdot s/m^2$

ตัวอย่าง เครื่องวัดความหนืดดังรูปเมื่อรัศมีเฉลี่ยของทรงกระบอกเท่ากับ 5 เซนติเมตร h เท่ากับ 12 เซนติเมตร ความหนาของของเหลวเท่ากับ 2 มิลลิเมตร ต้องใช้ทอร์กขนาด 0.054 นิวตัน.เมตร เพื่อหมุนทรงกระบอกในด้วยอัตรา 50 รอบ/นาที จงหาสัมประสิทธิ์ของความหนืดของของเหลวนี้



เลขของเรย์โนลด์

ถ้าอัตราการไหลของของเหลว **v ผ่านท่อมีค่าสูงมาก** การไหลจะไม่เป็น **แบบละมินาร์แต่จะเป็นการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow)**



การไหลที่ไม่มีความปั่นป่วน **การไหลที่มีความปั่นป่วน**

ความปั่นป่วนกำหนดได้ด้วยตัวเลขของ **เรย์โนลด์ (Reynolds' number)** แทนด้วย **Re** เพื่อเป็นเกียรติแก่ ออสบอร์น เรย์โนลด์ (Osborne Reynolds) ในกรณีที่ของไหลผ่านท่อ ตัวเลขเรย์โนลด์มีนิยามว่า

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{2r\rho}{\eta} v_{ave}}$$

v_{ave} คือ อัตราเร็วเฉลี่ยของของไหล

r คือ รัศมีของท่อ

Re คือ เป็นตัวเลขไม่มีหน่วย

$\mathrm{Re} < 2,000$ ⇨ การไหลแบบละมิน่าร์

$\mathrm{Re} > 2,000$ ⇨ การไหลแบบปั่นป่วน

กฎของสโตกส์

พิจารณากรณีที่วัตถุ (ของแข็ง) เคลื่อนที่ผ่านของไหลที่มีความหนืดซึ่งอยู่นิ่ง **ตัวเลขเรย์โนลด์**นิยามว่า

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{L\rho}{\eta} v}$$

เมื่อ L คือ ความยาวของวัตถุ

ถ้า **Re** มีค่าน้อยกว่า 1 สายกระแสรอบวัตถุจะเป็นการไหล**แบบละมินาร์**

ตัวอย่าง อัตราเร็วเฉลี่ยของโลหิตในเอออร์ตา (aorta) ซึ่งมีรัศมี r = 1.0 cm เท่ากับ 30 cm/s การไหลของโลหิตในเอออร์ตาเป็นแบบละมินาร์หรือแบบปั่นป่วน กำหนดให้ เลือดมีความหนาแน่น 1.05 x 10^3 kg/m^3 และมีค่าความหนืด 4 x 10^{-3} Pa.s

ถ้า <u>Re น้อย</u> <u>ขนาดของ</u>แรงต้านทานการเคลื่อนที่เนื่องจากความหนืด (viscous force) จะแปรผันกับความเร็วของวัตถุ

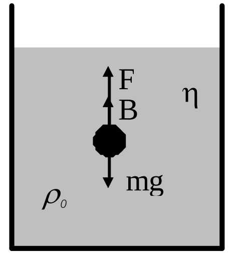
$$\boxed{F = kv}$$

เมื่อ k คือค่าคงตัว ขึ้นอยู่กับขนาดและรูปร่างของวัตถุ

สำหรับวัตถุรูปทรงกลมรัศมี r ค่าคงตัวนี้มีค่า sphere

$$k_{sphere} = 6\pi r\eta$$

$$\boxed{F_{sphere} = 6\pi r\eta v}$$ ⇨ **กฎของสโตกส์**

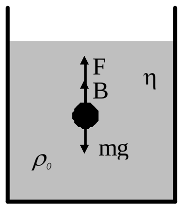


ทรงกลมตันตกในของเหลว

อัตราเร็วปลาย (terminal speed) =????

ρ_0 ความหนาแน่นของของเหลว

ρ ความหนาแน่นของของทรงกลมตัน



ขนาดแรงลอยตัว + ขนาดแรงต้านของเหลว = ขนาดน้ำหนักของทรงกลม

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g + 6\pi\eta r v_t = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$$

$$\boxed{v_t = \frac{2}{9}\frac{r^2 g}{\eta}(\rho - \rho_0)}$$

ตัวอย่าง จงหาอัตราความเร็วของวัตถุ

(a) ขนาดความยาว 1 mm เคลื่อนที่ผ่านน้ำ

(b) ขนาดความยาว 2 mm เคลื่อนที่ผ่านอากาศ

เมื่อ Re = 1 และกำหนดให้ที่อุณหภูมิ $20^\circ C, \rho_{Water} = 10^3\, kg/m^3$

$\eta_{Water} = 1\times 10^{-3} P,\ \rho_{Air} = 1.3\, kg/m^3, \eta_{Air} = 180\times 10^{-6} P$