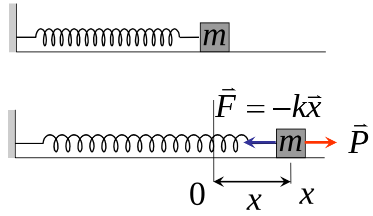
หน่วยที่ 6 การกวัดแกว่ง

ตอนที่ 6.1 การแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

ตอนที่ 6.2 ระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

ตอนที่ 6.3 การแกว่งกวัดแบบหน่วงและแบบบังคับ

สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว



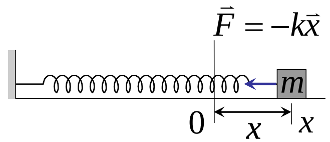
การเคลื่อนที่แบบนี้เรียกว่า

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

(simple harmonic motion) SHM

ตอนที่ 6.1การแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

- สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว
- แนวเทียบวงกลมอ้างอิงกับฮาร์มอนิกเชิงเดียว
- พลังงานของตัวแกว่งกวัด



กฎของฮุก (Hooke's law)

$$\boxed{\vec{F} = -k\vec{x}}$$

k คือค่าคงตัวของสปริงมีหน่วยเป็นนิวตันต่อเมตร (N/m)

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

ในกรณี 1 มิติ

$$-kx = ma$$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Khanchai Khosonthongkee

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0}$$

$$\boxed{\omega^2=\frac{k}{m}}$$

สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

$$x(t)=???$$

เดาคำตอบ

$\boxed{x(t)=A\sin(\omega t+\phi)}$ หรือ $\boxed{x(t)=A\cos(\omega t+\phi)}$

A แอมปลิจูด

ω ความถี่เชิงมุม เรเดียน ต่อ วินาที (rad/s)

$\omega t+\phi$ มุมเฟส

ϕ เฟสเริ่มต้น

ถูกกำหนดด้วย การกระจัด และความเร็ว ในตอนเริ่มต้น

$$\boxed{x(t)=A\sin(\omega t+\phi)}$$

คาบของการกวัดแกว่ง (T) เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ครบ 1 รอบ หน่วยคือ วินาที

$$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$$

$$\sin(\omega t+2\pi)=\sin\omega t\cos 2\pi+\cos\omega t\sin 2\pi$$

$$=\sin\omega t$$

$$\sin(\omega t+2\pi)=\sin[\omega(t+T)]$$

$$\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=\omega(t+T)$$

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}}$$

ความถี่ของการกวัดแกว่ง (f) จำนวนรอบที่เคลื่อนที่ได้ใน หนึ่งวินาที หน่วยคือ รอบต่อวินาที หรือ Hz

$$\boxed{f=\frac{1}{T}}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0}$$

$$v=\frac{dx}{dt}$$

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=-\frac{\omega^2}{2}x^2+c$$

จากเงื่อนไข

$$x=A\qquad\frac{dx}{dt}=0\qquad c=\frac{\omega^2}{2}A^2$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=v^2=\omega^2(A^2-x^2)$$

$$\boxed{v=\frac{dx}{dt}=\omega\sqrt{A^2-x^2}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\omega dt$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)=\omega t+\phi$$

$$\boxed{x=A\sin(\omega t+\phi)}$$

$$\boxed{x(t)=A\sin(\omega t+\phi)}$$

ถ้ากำหนดให้ $\phi=\phi'+\frac{\pi}{2}$

$$x(t)=A\sin(\omega t+\phi)$$

$$=A\sin\left(\omega t+\phi'+\frac{\pi}{2}\right)=A\sin\left((\omega t+\phi')+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=A\left[\sin(\omega t+\phi')\cos\frac{\pi}{2}+\cos(\omega t+\phi')\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\boxed{x(t)=A\cos(\omega t+\phi')}$$

$$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$$

การกระจัด $\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \phi)}$

ความเร็ว $$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi)}$$

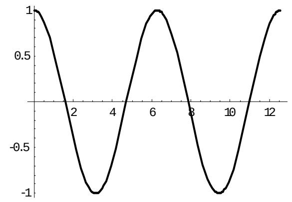
ความเร่ง $$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)}$$

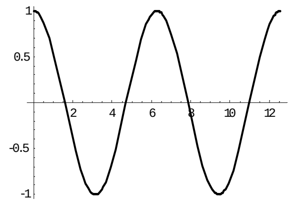
$$a(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

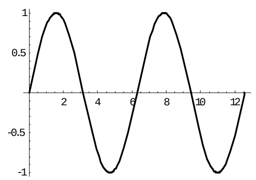
In[7]:= Plot[Sin[a+ $\frac{\pi}{2}$], {a, 0, 4π}, PlotStyle→{{Thickness[0.01]}}]



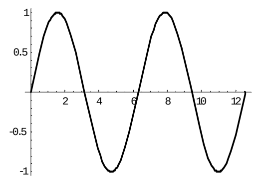
In[8]:= Plot[Cos[a], {a, 0, 4π}, PlotStyle→{{Thickness[0.01]}}]



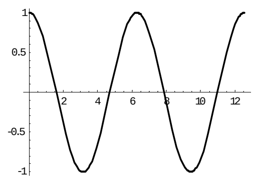
In[3]:= Plot[Sin[a], {a, 0, 4π}, PlotStyle→{{Thickness[0.01]}}]



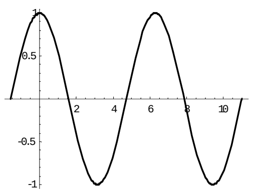
In[3]:= Plot[Sin[a], {a, 0, 4π}, PlotStyle→{{Thickness[



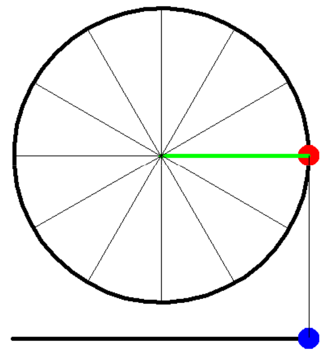
In[8]:= Plot[Cos[a], {a, 0, 4π}, PlotStyle→{{Thickness[0.01]}}]



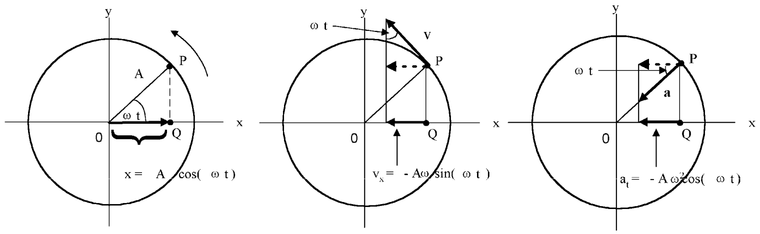
In[6]:= Plot[Cos[a], {a, $\frac{-\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$}, PlotStyle→{{Thickness[0.01]}}]



แนวเทียบวงกลมอ้างอิงกับฮาร์มอนิกเชิงเดียว



http://www.physics.uoguelph.ca/tutorials/shm/phase0.html



(a) ตำแหน่ง x ของจุด Q   (b) ความเร็ว v_x ของจุด Q   (b) ความเร่ง a_x ของจุด Q

รูป แสดงวงกลมอ้างอิงสำหรับ SHM ของจุด Q
ซึ่งเคลื่อนที่ไป-กลับในแนวแกน $\pm x$

พลังงานของตัวแกว่งกวัด

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$$

ระบบประกอบด้วยพลังงานศักย์ และพลังงานจลน์

พลังงานศักย์

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k[A\cos(\omega t + \phi)]^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

พลังงานศักย์มีค่าสูงสุดเท่ากับ $\frac{1}{2}kA^2$ ณ ตำแหน่งที่มีการกระจัดเป็น $\pm A$

พลังงานศักย์มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 0 ณ ตำแหน่งสมดุล

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)} \qquad \boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

พลังงานจลน์ $\frac{1}{2}mv^2$

$$\boxed{v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \phi)}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[-A\omega\sin(\omega t + \phi)]^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi)$$
$$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

พลังงานจลน์มีค่าสูงสุดเท่ากับ $\frac{1}{2}kA^2$ ณ ตำแหน่งสมดุล

พลังงานจลน์มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 0 ณ ตำแหน่งที่มีการกระจัดเป็น $\pm A$

พลังงานศักย์ $E_p(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$

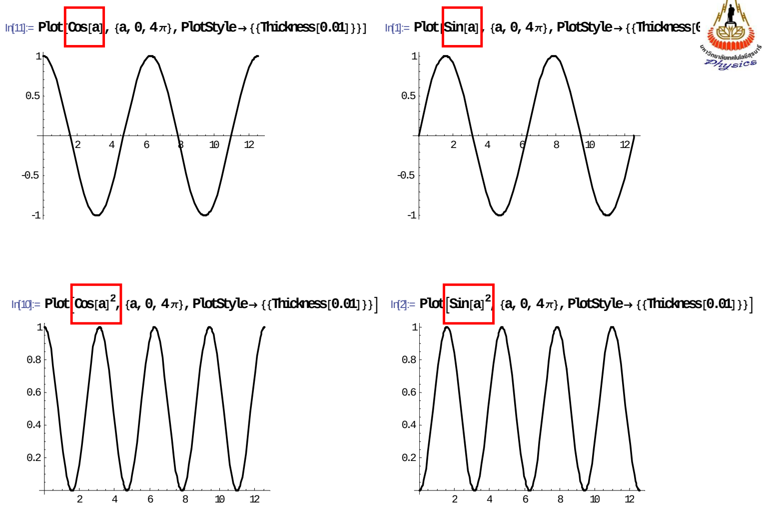
พลังงานจลน์ $E_k(t) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$

พลังงานรวม

$$E = E_p(t) + E_k(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2\left[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)\right]$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}kA^2}$$



พลังงานศักย์

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E_{p,MAX} = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_{p,MIN} = 0$$

$$E_{p,AVE} = \frac{1}{2}kA^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}kA^2$$

พลังงานจลน์

$$E_k(t) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

$$E_{k,MAX} = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_{k,MIN} = 0$$

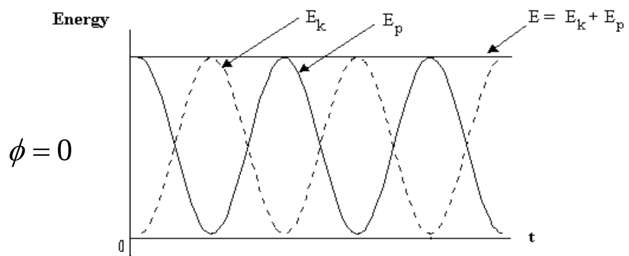
$$E_{k,AVE} = \frac{1}{2}kA^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}kA^2$$

พลังงานศักย์ $E_p(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$

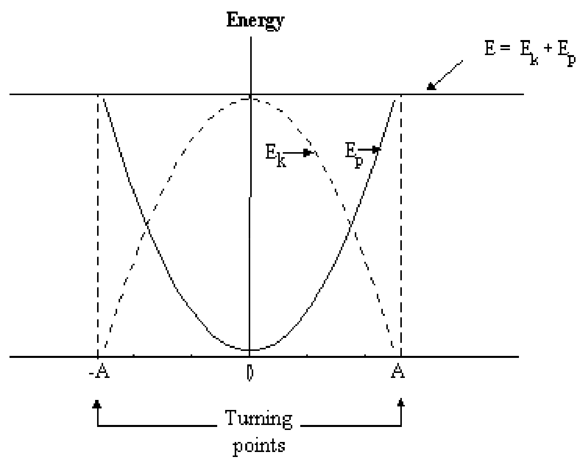
พลังงานจลน์ $E_k(t) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}kA^2}$$

$\phi = 0$



กราฟแสดงพลังงานจลน์ พลังงานศักย์ และพลังงานรวมที่เป็นฟังก์ชันของเวลา



กราฟแสดงพลังงานจลน์ พลังงานศักย์ และพลังงานรวมที่เป็นฟังก์ชันการกระจัด

ตัวอย่างที่ 1 การเคลื่อนที่แบบ SHM ซึ่งแทนด้วยสมการ

$$x(t) = 5\sin\left(20t - \frac{\pi}{3}\right)$$

โดยที่ ***x*** มีหน่วยเป็นเมตร ***t*** มีหน่วยเป็นวินาที และเฟสมีหน่วยเป็นเรเดียน จงคำนวณหา

1. ความถี่
2. คาบ
3. การกระจัดสูงสุด
4. อัตราเร็วสูงสุด
5. อัตราเร่งสูงสุด
6. การกระจัด อัตราเร็ว และอัตราเร่ง ที่เวลา $t = 0$ และ $t = \frac{\pi}{40}$ วินาที

ตัวอย่างที่ 2 การเคลื่อนที่แบบ SHM ซึ่งแทนด้วยสมการ

$$x(t) = 12\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

คาบของการกวัดแกว่งเท่ากับ 20 วินาที และที่เวลา t=0 การกระจัดของอนุภาคเท่ากับ 6 เมตร จงหา

1. เฟสเริ่มต้น
2. เวลาที่น้อยที่สุดที่ทำให้เกิดการกระจัด $6\sqrt{3}$ เมตร
3. เฟสที่แตกต่างกันระหว่างตำแหน่ง 2 ตำแหน่งของอนุภาคที่เวลาต่างกัน 5 วินาที

ตัวอย่างที่ 3 มวล 1 กิโลกรัมเคลื่อนที่แบบ SHM ด้วยแอมพลิจูด 0.05 เมตร และคาบ 5 วินาที จงหา

1. อัตราเร็วของมวลที่จุดซึ่งห่างจากจุดกึ่งกลางของการแกว่งกวัดเป็นระยะ 0.03 เมตร มีค่าเป็นเท่าใด
2. พลังงานศักย์ที่จุดซึ่งอยู่ห่างจากจุดกึ่งกลางของการกวัดแกว่งเป็นระยะ 0.03 เมตรมีค่ากี่จูล

1) $1.6\pi \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s}$

2) $0.72\,\pi^2 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}$

ตัวอย่างที่ 4 มวล 2.0 กิโลกรัมยึดติดกับสปริงและเคลื่อนที่แบบ SHM ด้วยแอมพลิจูด 0.12 เมตรพลังงานจลน์ที่ระยะการกระจัดเท่ากับ 0.07 เมตร มีค่า 0.38 จูล ค่าคงตัวของสปริงมีค่าเท่าใด

$k = 80\,\mathrm{N/m}$

ตัวอย่างที่5 มวล m = 2.0 kg ติดที่ปลายสปริงเบา เมื่อออกแรง F = 20.0 N ดึงที่ปลายทำให้สปริงยืดออกเป็นระยะ x(0) = 40 cm หลังจากนั้นเริ่มจับเวลาพร้อมกับปล่อยให้มวลเคลื่อนที่ และถ้าไม่มีแรงเสียดทานในการเคลื่อนที่ และกำหนดให้สมการแสดงตำแหน่งของมวลที่เวลาใด ๆคือ $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$จงหา

- ค่าคงตัว (k) ของสปริง
- อัมพลิจูด (A)
- ความถี่เชิงมุม (ω)
- มุมเฟส (ϕ) เริ่มต้น
- จงหาความเร็วสูงสุดในการเคลื่อนที่ของมวลที่ปลายสปริงนี้
- จงหาพลังงานรวมของระบบ

หน่วยที่ 6 การกวัดแกว่ง

ตอนที่ 6.1 การแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

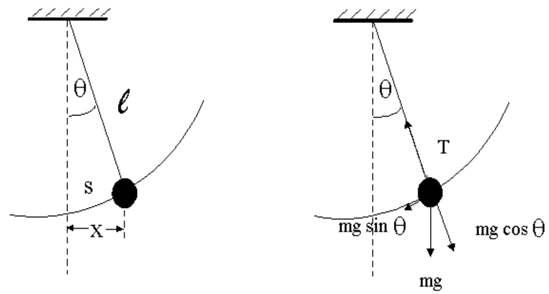
ตอนที่ 6.2 ระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

ตอนที่ 6.3 การแกว่งกวัดแบบหน่วงและแบบบังคับ

ตอนที่ 6.2 ระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

- ลูกตุ้มเชิงเดียว
- ลูกตุ้มฟิสิกัล

ลูกตุ้มเชิงเดียว



$$F_t = -mg\sin\theta$$

$$F_t = ma = m\frac{d^2s}{dt^2} \qquad s = l\theta$$

$$F_t = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

เนื่องจาก

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$$

พิจารณาการสั่นที่มีมุมแคบ ๆ $\boxed{\sin\theta \approx \theta}$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

พิจารณาการสั่นที่มีมุมแคบ ๆ $\boxed{\sin\theta \approx \theta}$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

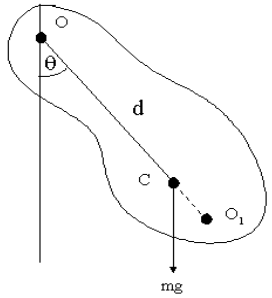
สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}} \qquad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

ลูกตุ้มฟิสิกัล

วัตถุแข็งเกร็งที่แกว่งกวัดรอบจุดหนึ่งที่ไม่ใช่จุดศูนย์กลางมวล เรียกว่า**ลูกตุ้มฟิสิกัล**



ทอร์คที่จุด O เนื่องจากแรงโน้มถ่วงมีค่า

$$\tau = I\alpha$$

I โมเมนต์ความเฉื่อย รอบจุด O

α อัตราเร่งเชิงมุม

$$-mgd\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

พิจารณาการสั่นที่มีมุมแคบ ๆ $\sin\theta \approx \theta$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0}$$

สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I} \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}} \qquad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mdg}}}$$

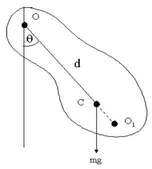
ลูกตุ้มเชิงเดียว

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

ลูกตุ้มฟิสิกัล

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mdg}}}$$

ความยาวสมมูล (equivalent length) ของลูกตุ้มฟิสิกัลป์หรือ l_{eq} คือ ความยาวของลูกตุ้มเชิงเดียวที่มีคาบเท่ากับคาบของลูกตุ้มฟิสิกัลนี้



$$\boxed{l_{eq} = \frac{I}{md}} \qquad \boxed{I = I_{CM} + md^2}$$

$$mdl_{eq} = I_{CM} + md^2 = md\left(d + \frac{I_{CM}}{md}\right)$$

$$l_{eq} = d + \frac{I_{CM}}{md}$$

$$\boxed{l_{eq} > d}$$

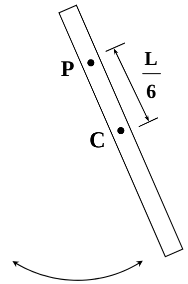
ตัวอย่างที่ 1 ลูกตุ้มเชิงเดียวมีคาบของการแกว่งกวัดเป็น 2.50 วินาทีจงหา

1. ความยาวของเชือกเส้นนี้
2. จงหาคาบของการแกว่งของลูกตุ้มเชิงเดียวเมื่ออยู่บนดวงจันทร์

กำหนดให้ $g_M = 1.67\, m/s^2$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาความถี่และคาบ ของลูกตุ้มเชิงเดียวที่มีความยาวเชือกเป็น 10 เมตร $(g = 10\, m/s^2)$

ตัวอย่างที่ 3 ไม้บรรทัดยาว L แกว่งกวัดไปมาในแนวดิ่งรอบจุด P ซึ่งเป็นศูนย์กลางการแกว่งกวัด (center of oscillation) ถ้าระยะจากจุดศูนย์กลางมวล C ของไม้บรรทัดไปยังจุด P $\frac{L}{6}$ เท่ากับ จงหาคาบของการแกว่งกวัด $\left(I_{CM} = \frac{ML^2}{12}\right)$



ตัวอย่างที่ 4 ลูกตุ้มฟิสิกัลชุดหนึ่งเคลื่อนที่แบบฮาโมนิคเชิงเดียวด้วยความถี่ 0.45 Hz ถ้า ลูกตุ้มฟิสิกัลนี้มีมวล 2.2 กิโลกรัม และมีจุดหมุนอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวล 0.35 เมตร จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของลูกตุ้มฟิสิกัลรอบจุดศูนย์กลางมวล

หน่วยที่ 6 การกวัดแกว่ง

ตอนที่ 6.1 การแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

ตอนที่ 6.2 ระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

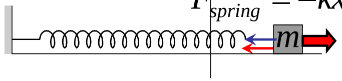
ตอนที่ 6.3 การแกว่งกวัดแบบหน่วงและแบบบังคับ

ตอนที่ 6.3 การแกว่งกวัดแบบหน่วงและแบบบังคับ

- สมการของการแกว่งกวัดแบบหน่วง
- พลังงานที่สูญเสียไป
- ผลของแรงภายนอก

สมการของการแกว่งกวัดแบบหน่วง

$$\vec{F}_{spring} = -k\vec{x}$$



$$\vec{F}_{Air} = -b\vec{v}$$

กรณีมีแรงต้านอากาศ
ซึ่งเป็นสัดส่วนกับความเร็วและมีทิศตรงข้ามกับการเคลื่อนที่ ซึ่งสามารถแทนด้วย

$$\vec{F}_{Air} = -b\vec{v}$$

b เป็นค่าคงตัวเรียกว่า ค่าคงตัวการหน่วง (damping constant)

$\vec{v}$ ความเร็วของวัตถุ

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

ในกรณี 1 มิติ $\quad -kx - bv = ma$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \qquad \boxed{\tau = \frac{m}{b}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt}+\omega^2 x=0$$

เดาคำตอบ $\boxed{x(t)=Ae^{\alpha t}}$

$$A\alpha^2 e^{\alpha t}+\frac{A\alpha}{\tau}e^{\alpha t}+\omega_0^2 Ae^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha^2+\frac{\alpha}{\tau}+\omega_o^2 = 0$$

$$\alpha=\frac{-\frac{1}{\tau}\pm\sqrt{\frac{1}{\tau^2}-4\omega_o^2}}{2}$$

$$\alpha=-\frac{1}{2\tau}\pm\sqrt{\frac{1}{4\tau^2}-\omega_o^2}$$

$$\beta\equiv\sqrt{\frac{1}{4\tau^2}-\omega_o^2}$$

$$\alpha=-\frac{1}{2\tau}\pm\beta$$

$$\alpha=-\frac{1}{2\tau}\pm\beta$$

$$\alpha_1=-\frac{1}{2\tau}+\beta$$

$$\alpha_2=-\frac{1}{2\tau}-\beta$$

$$x(t)=e^{-t/2\tau}\left[A_1e^{\beta t}+A_2e^{-\beta t}\right]$$

A_1 และ A_2 กำหนดจากเงื่อนไขเริ่มต้น

ที่เวลา $t=0$ การกระจัดมีค่าสูงสุดเท่ากับ

$$x(0)=e^{-0/2\tau}\left[A_1e^{\beta\times 0}+A_2e^{-\beta\times 0}\right]=A_1+A_2$$

ถ้าให้ $A=A_1+A_2$

$$x(t)=e^{-t/2\tau}\left[A_1e^{\beta t}+A_2e^{-\beta t}\right]$$

ความเร็ว $v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[e^{-t/2\tau}\left[A_1e^{\beta t}+A_2e^{-\beta t}\right]\right]$

$$v(t)=e^{-t/2\tau}\frac{d}{dt}\left[A_1e^{\beta t}+A_2e^{-\beta t}\right]+\left[A_1e^{\beta t}+A_2e^{-\beta t}\right]\frac{d}{dt}\left[e^{-t/2\tau}\right]$$

$$v(t)=e^{-t/2\tau}\left[\frac{d}{dt}A_1e^{\beta t}+\frac{d}{dt}A_2e^{-\beta t}\right]+\left[A_1e^{\beta t}+A_2e^{-\beta t}\right]\frac{d}{dt}\left[e^{-t/2\tau}\right]$$

$$v(t)=e^{-t/2\tau}\left[A_1\beta e^{\beta t}-A_2\beta e^{-\beta t}\right]+\left[A_1e^{\beta t}+A_2e^{-\beta t}\right]\left[-\frac{1}{2\tau}e^{-t/2\tau}\right]$$

$$v(0)=e^{-0/2\tau}\left[A_1\beta e^{\beta\times 0}-A_2\beta e^{-\beta\times 0}\right]+\left[A_1e^{\beta\times 0}+A_2e^{-\beta\times 0}\right]\left[-\frac{1}{2\tau}e^{-0/2\tau}\right]$$

$$v(0)=e^{-0/2\tau}\left[A_1\beta e^{\beta\times 0}-A_2\beta e^{-\beta\times 0}\right]+\left[A_1e^{\beta\times 0}+A_2e^{-\beta\times 0}\right]\left[-\frac{1}{2\tau}e^{-0/2\tau}\right]$$

$$v(0)=\left(A_1\beta-A_2\beta\right)-\frac{1}{2\tau}\left(A_1+A_2\right)$$

ในกรณี $v(0)=0$ $\quad x(0)=A_1+A_2=A$

$$\beta\left(A_1-A_2\right)=\frac{1}{2\tau}\left(A_1+A_2\right)$$

$$\beta\left(A_1-A_2\right)=\frac{1}{2\tau}A$$

$$A_1-A_2=\frac{1}{2\tau\beta}A$$

$$A_1 = \frac{A}{2}\left(1+\frac{1}{2\beta\tau}\right)$$

$$A_2 = \frac{A}{2}\left(1-\frac{1}{2\beta\tau}\right)$$

$$x(t) = \frac{A}{2}e^{-t/2\tau}\left[\left(1+\frac{1}{2\beta\tau}\right)e^{\beta t}+\left(1-\frac{1}{2\beta\tau}\right)e^{-\beta t}\right]$$

$$\beta \equiv \sqrt{\frac{1}{4\tau^2}-\omega_o^2}$$

$$x(t) = \frac{A}{2}e^{-t/2\tau}\left[\left(1+\frac{1}{2\beta\tau}\right)e^{\beta t}+\left(1-\frac{1}{2\beta\tau}\right)e^{-\beta t}\right]$$

เมื่อ $\beta = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2}-\omega_o^2}$

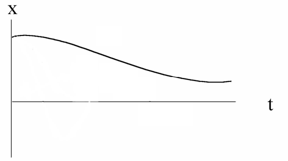
เราสามารถพิจารณาผลของคำตอบได้เป็น 3 กรณี คือ

$\boxed{\text{กรณีที่ 1} \quad \frac{1}{2\tau} > \omega_o}$ $\Rightarrow$ β เป็นจำนวนจริง ที่มีค่าบวก

การกระจัด $x(t)$ จะมีค่าลดลงโดยไม่มีการเปลี่ยนทิศทาง

ไม่มีการแกว่งกวัดอีกเลย แต่จะคืนสู่ตำแหน่งสมดุล

เรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่า **แบบหน่วงเกิน (overdamped)**



$\boxed{\text{กรณีที่ 2} \quad \frac{1}{2\tau} = \omega_o}$ $\Rightarrow \beta = 0$

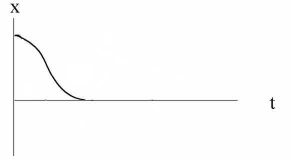
$$\beta = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2}-\omega_o^2}$$

$$x(t) = \frac{A}{2}e^{-t/2\tau}\left[\left(1+\frac{1}{2\beta\tau}\right)e^{\beta t}+\left(1-\frac{1}{2\beta\tau}\right)e^{-\beta t}\right]$$

$$\boxed{x(t) = Ae^{-t/2\tau}\left(1+\frac{t}{2\tau}\right)}$$

ระบบจะคืนสู่ตำแหน่งสมดุลภายในระยะเวลาอันสั้นมาก

เรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่า **แบบหน่วงวิกฤต (critically damped)**



$$x(t) = \frac{A}{2}e^{-t/2\tau}\left[\left(1+\frac{1}{2\beta\tau}\right)e^{\beta t}+\left(1-\frac{1}{2\beta\tau}\right)e^{-\beta t}\right]$$

$$e^{x} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots \qquad e^{-x} = 1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$$

$$x(t) = \frac{A}{2}e^{-t/2\tau}\left[\left(1+\frac{1}{2\beta\tau}\right)\left(1+\beta t+\frac{(\beta t)^2}{2!}+\frac{(\beta t)^3}{3!}+\frac{(\beta t)^4}{4!}+\ldots\right)\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{1}{2\beta\tau}\right)\left(1-\beta t+\frac{(\beta t)^2}{2!}-\frac{(\beta t)^3}{3!}+\frac{(\beta t)^4}{4!}-\ldots\right)\right]$$

$$x(t) = \frac{A}{2}e^{-t/2\tau}\left[\left(1+\beta t+\frac{(\beta t)^2}{2!}+\frac{(\beta t)^3}{3!}+\frac{(\beta t)^4}{4!}+\ldots\right)+\frac{1}{2\beta\tau}\left(1+\beta t+\frac{(\beta t)^2}{2!}+\frac{(\beta t)^3}{3!}+\frac{(\beta t)^4}{4!}+\ldots\right)\right.$$
$$\left.+\left(1-\beta t+\frac{(\beta t)^2}{2!}-\frac{(\beta t)^3}{3!}+\frac{(\beta t)^4}{4!}-\ldots\right)-\frac{1}{2\beta\tau}\left(1-\beta t+\frac{(\beta t)^2}{2!}-\frac{(\beta t)^3}{3!}+\frac{(\beta t)^4}{4!}-\ldots\right)\right]$$

$$x(t) = \frac{A}{2}e^{-t/2\tau}\left[\left(2+2\frac{(\beta t)^2}{2!}+2\frac{(\beta t)^4}{4!}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2\beta\tau}+\frac{t}{2\tau}+\frac{1}{2\tau}\frac{\beta t^2}{2!}+\frac{1}{2\tau}\frac{\beta^2 t^3}{3!}+\frac{1}{2\tau}\frac{\beta^3 t^4}{4!}+\ldots\right)\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{1}{2\beta\tau}+\frac{t}{2\tau}-\frac{1}{2\tau}\frac{\beta t^2}{2!}+\frac{1}{2\tau}\frac{\beta^2 t^3}{3!}-\frac{1}{2\tau}\frac{\beta^3 t^4}{4!}+\ldots\right)\right]$$

$$x(t)=\frac{A}{2}e^{-t/2\tau}\left[\left(2+2\frac{(\beta t)^2}{2!}+2\frac{(\beta t)^4}{4!}+\dots\right)+\left(\frac{1}{2\beta\tau}+\frac{t}{2\tau}+\frac{1}{2\tau}\frac{\beta t^2}{2!}+\frac{1}{2\tau}\frac{\beta^2 t^3}{3!}+\frac{1}{2\tau}\frac{\beta^3 t^4}{4!}+\dots\right)\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{1}{2\beta\tau}+\frac{t}{2\tau}-\frac{1}{2\tau}\frac{\beta t^2}{2!}+\frac{1}{2\tau}\frac{\beta^2 t^3}{3!}-\frac{1}{2\tau}\frac{\beta^3 t^4}{4!}+\dots\right)\right]$$

$$x(t)=\frac{A}{2}e^{-t/2\tau}\left[\left(2+2\frac{(\beta t)^2}{2!}+2\frac{(\beta t)^4}{4!}+\dots\right)+\left(\frac{t}{\tau}+\frac{1}{\tau}\frac{\beta^2 t^3}{3!}+\dots\right)\right]$$

$$\beta=0 \qquad x(t)=\frac{A}{2}e^{-t/2\tau}\left[\left(2+2\frac{(0\times t)^2}{2!}+2\frac{(0\times t)^4}{4!}+\dots\right)+\left(\frac{t}{\tau}+\frac{1}{\tau}\frac{0^2 t^3}{3!}+\dots\right)\right]$$

$$x(t)\Big|_{\beta=0}=\frac{A}{2}e^{-t/2\tau}\left[2+\frac{t}{\tau}\right]$$

$$\boxed{x(t)\Big|_{\beta=0}=A\,e^{-t/2\tau}\left[1+\frac{t}{2\tau}\right]}$$

$$\boxed{\text{กรณีที่ 3}\quad \frac{1}{2\tau}<\omega_o} \Rightarrow \beta \text{ จำนวนจินตภาพ} \qquad \beta=\sqrt{\frac{1}{4\tau^2}-\omega_o^2}$$

$$\omega=\sqrt{\omega_o^2-\frac{1}{4\tau^2}} \qquad \beta=\sqrt{-1}\sqrt{\omega_o^2-\frac{1}{4\tau^2}} \qquad \beta=i\omega$$

$$x(t)=\frac{A}{2}e^{-t/2\tau}\left[\left(1+\frac{1}{2\beta\tau}\right)e^{\beta t}+\left(1-\frac{1}{2\beta\tau}\right)e^{-\beta t}\right]$$

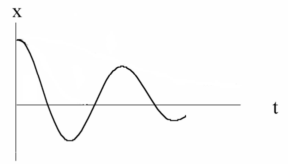
$$x(t)=A\,e^{-t/2\tau}\left[\left(\frac{e^{\beta t}+e^{-\beta t}}{2}\right)+\frac{1}{2\beta\tau}\left(\frac{e^{\beta t}+e^{-\beta t}}{2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2\tau}<\omega_o \Rightarrow x(t)=Ae^{-t/2\tau}\left[\left(\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right)+\frac{1}{2\omega\tau}\left(\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right)\right]$$

$$x(t)=Ae^{-t/2\tau}\left[\cos\omega t+\frac{1}{2\omega\tau}\sin\omega t\right]$$

$$\boxed{\therefore\ x(t)=ae^{-t/2\tau}\sin(\omega t+\phi)} \qquad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0} \qquad \boxed{\tau=\frac{m}{b}}$$

$$a=\frac{A}{2\omega\tau}(4\omega^2\tau^2+1)^{1/2} \qquad \phi=\tan^{-1}2\omega\tau$$



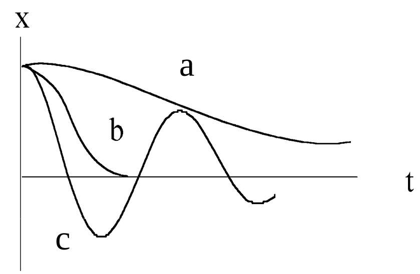
การแกว่งกวัดด้วยความถี่เชิงมุม ω

ถ้า b = 0 ความถี่ $\omega=\omega_o$ ซึ่งเป็น

ความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ของระบบ

แอมพลิจูดของการแกว่งกวัดจะลดลงตามเวลาที่เพิ่มขึ้น

เราเรียกการแกว่งกวัดในกรณีนี้ว่าเป็น**แบบหน่วงขาด (underdamped)**



กราฟของการกระจัดกับเวลาแสดงการแกว่งกวัดแบบหน่วง 3 ประเภท คือ

(a) Overdamped $\boxed{\frac{1}{2\tau}>\omega_o}$

(b) Critically Damped $\boxed{\frac{1}{2\tau}=\omega_o}$

(c) Underdamped $\boxed{\frac{1}{2\tau}<\omega_o}$

พลังงานที่สูญเสียไป

ระบบจะสูญเสียพลังงานเพื่อเอาชนะแรงเสียดทาน

พลังงานจลน์ $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

$$E_k = \frac{1}{2}ma^2e^{-t/\tau}\left[\omega^2\cos^2(\omega t+\phi)+\frac{1}{4\tau^2}\sin^2(\omega t+\phi)-\frac{\omega}{2\tau}\sin 2(\omega t+\phi)\right]$$

พลังงานศักย์ $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_o^2x^2$

$$= \frac{1}{2}m\omega_o^2a^2e^{-t/\tau}\sin^2(\omega t+\phi)$$

พลังงานรวม = พลังงานจลน์ + พลังงานศักย์

$$= \frac{1}{2}ma^2e^{-t/\tau}\left[\omega^2\cos^2(\omega t+\phi)+\left(\omega_o^2+\frac{1}{4\tau^2}\right)\sin^2(\omega t+\phi)-\frac{\omega}{2\tau}\sin 2(\omega t+\phi)\right]$$

$$E = \frac{1}{2}ma^2e^{-t/\tau}\left[\omega^2\cos^2(\omega t+\phi)+\left(\omega_o^2+\frac{1}{4\tau^2}\right)\sin^2(\omega t+\phi)-\frac{\omega}{2\tau}\sin 2(\omega t+\phi)\right]$$

พลังงานรวมเฉลี่ย $E_{ave} = \frac{1}{4}ma^2e^{-t/\tau}\left(\omega^2+\omega_o^2+\frac{1}{4\tau^2}\right)$

เมื่อการหน่วงมีค่าน้อย ค่าของ τ จะมีค่ามาก ดังนั้นเทอม $\frac{1}{4\tau^2}$ อาจตัดทิ้งได้

$$E_{ave} = \frac{1}{2}ma^2\omega_o^2e^{-t/\tau}$$

การสูญเสียกำลังโดยเฉลี่ย

คือค่าลบของอัตราเฉลี่ยการทำงานเพื่อต่อต้านแรงเสียดทาน
หรือเป็นอัตราการลดค่าพลังงานเฉลี่ยของระบบซึ่งมีค่าดังนี้

$$\boxed{P_{ave} = -\frac{d}{dt}E_{ave}} \Rightarrow P_{ave} = \frac{1}{2\tau}ma^2\omega_o^2e^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{P_{ave} = \frac{E_{ave}}{\tau}}$$

ตัวอย่าง การกวัดแกว่งของวัตถุหนึ่งเป็นไปตามสมการ

$$10\frac{d^2x}{dt^2}+60\frac{dx}{dt}+100x = 0$$

อยากทราบว่าเป็นการกวัดแกว่งชนิดใด

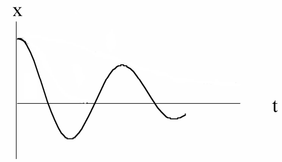
ให้หาคาบของการกวัดแกว่ง

เมื่อเริ่มต้น x=0, v=8m/s ให้หาแอมพลิจูด

ให้หาเวลาที่พลังงานลดลงเป็น 1/e เท่าของค่าเริ่มต้น

ผลของแรงภายนอก

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx = 0$$



$F_o \sin\omega t$

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx = F_o\sin\omega t} \qquad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt}+\omega_o^2x = f_o\sin\omega t}$$

$$\frac{b}{m} = \frac{1}{\tau} \qquad \frac{k}{m} = \omega_o^2 \qquad \frac{F_o}{m} = f_o$$

ω ความถี่ของแรงกระตุ้น

ω' ความถี่ที่เกิดจากการหน่วง

ω_0 ความถี่ธรรมชาติ (ความถี่ที่ปราศจากแรงเสียดทานหรือแรงภายนอกอื่นใด)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt}+\omega_\circ^2 x = f_\circ \sin \omega t$$

เดาคำตอบ $\boxed{x(t) = A\sin(\omega t+\phi)}$

A คือแอมพลิจูด

ϕ คือเฟสที่แตกต่างกันระหว่างคลื่นการแกว่งกวัดของระบบ

และคลื่นของแรงภายนอก

$$-A\omega^2\sin(\omega t+\phi)+\frac{A\omega}{\tau}\cos(\omega t+\phi)+\omega_\circ^2 A\sin(\omega t+\phi) = f_\circ \sin \omega t$$

$$= f_\circ \sin(\omega t+\phi-\phi)$$

$$\left(\omega_\circ^2-\omega^2\right)A\sin(\omega t+\phi)+\frac{A\omega}{\tau}\cos(\omega t+\phi) = f_\circ \sin(\omega t+\phi)\cos\phi - f_\circ \cos(\omega t+\phi)\sin\phi$$

$$\left(\omega_\circ^2-\omega^2\right)A\boxed{\sin(\omega t+\phi)}+\frac{A\omega}{\tau}\boxed{\cos(\omega t+\phi)} = f_\circ\boxed{\sin(\omega t+\phi)}\cos\phi - f_\circ\boxed{\cos(\omega t+\phi)}\sin\phi$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของเทอม $\sin(\omega t+\phi)$ และ $\cos(\omega t+\phi)$

$$A\left(\omega_\circ^2-\omega^2\right) = f_\circ\cos\phi \qquad (1)$$

$$\frac{A\omega}{\tau} = -f_\circ\sin\phi \qquad (2)$$

$$(2)/(1) \qquad \tan\phi = -\frac{\omega/\tau}{\omega_\circ^2-\omega^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega/\tau}{\omega^2-\omega_\circ^2}$$

$$(1)^2+(2)^2 \qquad A^2\left(\omega_\circ^2-\omega^2\right)^2+\frac{A^2\omega^2}{\tau^2} = f_\circ^2$$

$$\boxed{A = \frac{f_\circ}{\left[\left(\omega_\circ^2-\omega^2\right)^2+\dfrac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}}$$

$$\boxed{A = \frac{f_\circ}{\left[\left(\omega_\circ^2-\omega^2\right)^2+\dfrac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}}$$

กรณีที่ 1 $\omega << \omega_o$

ความถี่จากแรงภายนอก**น้อยกว่า**ความถี่ธรรมชาติมากๆ

$$A = \frac{f_\circ}{\left[\left(\omega_\circ^2-\omega^2\right)^2+\dfrac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}$$

$\omega << \omega_o$

$$\boxed{A = \frac{f_\circ}{\omega_\circ^2} = \frac{F_\circ}{k}}$$

$$\frac{k}{m} = \omega_\circ^2$$

$$\frac{F_\circ}{m} = f_\circ$$

$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t+\phi)}$

กรณีที่ 2 $\omega = \omega_o$

ความถี่จากแรงภายนอกเท่ากับความถี่ธรรมชาติ

$$A = \frac{f_\circ}{\left[\left(\omega_\circ^2-\omega^2\right)^2+\dfrac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}$$

$\omega = \omega_o$

$$\boxed{A_r = \frac{f_\circ}{\omega/\tau} = \frac{f_\circ\tau}{\omega_\circ}}$$

$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t+\phi)}$

ความถี่ใน

การเกิดการสั่นพ้อง

$$\frac{dA}{d\omega} = -\frac{1}{2}f_\circ\frac{(-2)2\omega\left(\omega_\circ^2-\omega^2\right)+2\omega/\tau^2}{\left[\left(\omega_\circ^2-\omega^2\right)^2+\omega^2/\tau^2\right]^{3/2}} = 0_o$$

$$-4\omega\left(\omega_\circ^2-\omega^2\right)+\frac{2\omega}{\tau^2} = 0$$

$$\boxed{\therefore\ \omega = \omega_\circ\sqrt{1-\frac{1}{2\omega_\circ^2\tau^2}}}$$

ความหน่วงมีค่าน้อยมาก

กรณีที่ 3 $\omega >> \omega_o$ ความถี่จากแรงภายนอก**มากกว่า**ความถี่ธรรมชาติมากๆ

$$A = \frac{f_\circ}{\left[(\omega_\circ^2-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}$$

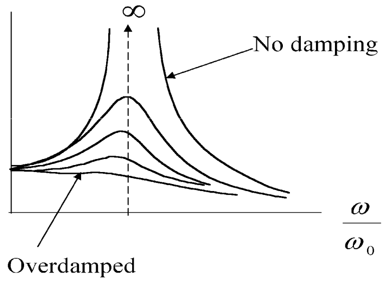
$$A = \frac{f_\circ}{\left[\left(\omega^2\left(\frac{\omega_\circ^2}{\omega^2}-1\right)\right)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}} \quad\Rightarrow\quad A = \frac{f_\circ}{\left[\omega^4\left(\frac{\omega_\circ^2}{\omega^2}-1\right)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}$$

$\omega >> \omega_o$

$$A = \frac{f_\circ}{\left[\omega^4+\frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} \boxed{A = \frac{f_\circ}{\omega^2} = \frac{F_\circ}{m\omega^2}}$$

การหน่วงมีค่าน้อยมาก

Amplitude of forced harmonic motion



ผลของแรงภายนอก

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx = F_\circ \sin\omega t}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt}+\omega_\circ^2 x = f_\circ \sin\omega t}$$

$$\frac{b}{m} = \frac{1}{\tau} \qquad \frac{k}{m} = \omega_\circ^2 \qquad \frac{F_\circ}{m} = f_\circ$$

ผลเฉลยคือ $\boxed{x(t) = A\sin(\omega t+\phi)}$

$$A = \frac{f_\circ}{\left[(\omega_\circ^2-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}$$

กรณีที่ 1 $\omega << \omega_o$

$$\boxed{A = \frac{f_\circ}{\omega_\circ^2} = \frac{F_\circ}{k}}$$

กรณีที่ 2 $\omega = \omega_o$

$$\boxed{A_r = \frac{f_\circ}{\omega/\tau} = \frac{f_\circ\tau}{\omega_\circ}}$$

$$\boxed{\therefore\ \omega = \omega_\circ\sqrt{1-\frac{1}{2\omega_\circ^2\tau^2}}}$$

การสั่นพ้อง

กรณีที่ 3 $\omega >> \omega_o$

$$A = \frac{f_\circ}{\left[\omega^4+\frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}$$

$\tau\to\infty$

$$\boxed{A = \frac{f_\circ}{\omega^2} = \frac{F_\circ}{m\omega^2}}$$