หน่วยที่ 5 การเคลื่อนที่แบบหมุน

ตอนที่ 5.1 วัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตรึง

ตอนที่ 5.2 โมเมนต์ความเฉื่อย

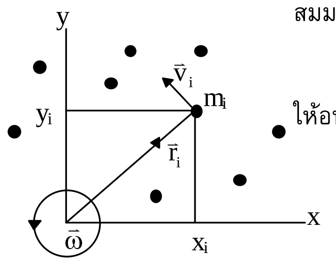
ตอนที่ 5.3 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง

ตอนที่ 5.1 วัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตรึง

- โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตรึง
- อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุหมุนรอบแกนตรึง
- พลังงานจลน์ของการหมุน

โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตรึง

1 วัตถุเป็นระบบอนุภาคที่ตรึงติดกัน



สมมติระบบประกอบด้วยอนุภาคมวล

$m_1, m_2 .... m_n$

ให้อนุภาคที่ i มีมวล m_i อยู่ที่ตำแหน่ง (x_i, y_i, z_i)

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$

ความเร็วเชิงเส้นในแนวเส้นรอบวง $\vec{v}_i = \vec{\omega}\times\vec{r}_i \quad \xrightarrow{\vec{\omega}\perp\vec{r}_i} \quad v_i = \omega r_i$

ค่าโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคที่ i $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i \quad \xrightarrow{\vec{r}_i\perp\vec{v}_i} \quad L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i^2\omega$

โมเมนตัมเชิงมุมรอบแกน z รวมทั้งระบบ $(\vec{L}_z)$

$$\vec{L}_z = \sum \vec{L}_i$$

$$= \sum m_i r_i^2 \omega \hat{k}$$

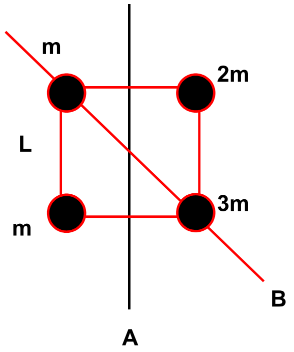
$$\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}$$

$$\boxed{I_z = \sum m_i r_i^2}$$

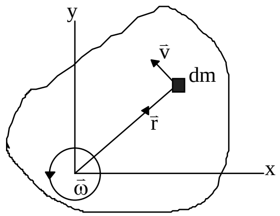
I_z โมเมนต์ความเฉื่อย (moment of inertia) ของระบบ รอบแกนหมุน z

Khanchai Khosonthongkee

ตัวอย่าง จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของระบบที่หมุนรอบแกนต่าง ๆ



2 วัตถุมีมวลต่อเนื่องเป็นก้อน



มวล dm นี้ไม่ว่าจะอยู่ตรงส่วนใดของก้อนจะเคลื่อนที่เป็นวงกลม

ด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ และความเร็ว $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} \xrightarrow{\vec{\omega}\perp\vec{r}_i} v = \omega r$

ขนาดโมเมนตัมเชิงเส้นของมวล dm

$$dp = vdm = \omega rdm$$ มีทิศไปตามเส้นรอบวง

โมเมนตัมเชิงมุมของมวล dm รอบแกน z

$$d\vec{L}_z = \vec{r}\times d\vec{p}$$

ขนาดโมเมนตัมเชิงมุมของมวล dm รอบแกน z

$$dL_z = rdp = \omega r^2 dm$$

โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุทั้งก้อน รอบแกน z

$$L_z = \omega\int r^2 dm$$ มีทิศไปทางแกน z

$$\vec{L}_z = I_z\vec{\omega} \qquad \boxed{I_z = \int r^2 dm}$$

I_z คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน z

อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุหมุนรอบแกนตรึง

ถ้ามีทอร์กภายนอก $\vec{\Gamma}$ มากระทำกับวัตถุ โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุจะเปลี่ยนไป

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{\Gamma} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{\Gamma} = I\vec{\alpha}$$

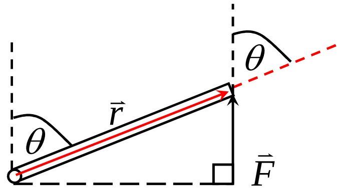
$\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ เป็นความเร่งเชิงมุมของวัตถุ

หมายความว่า เมื่อมีทอร์กมากระทำ วัตถุจะหมุนด้วยความเร่งเชิงมุม

เปรียบเทียบกับ $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

ทอร์ก

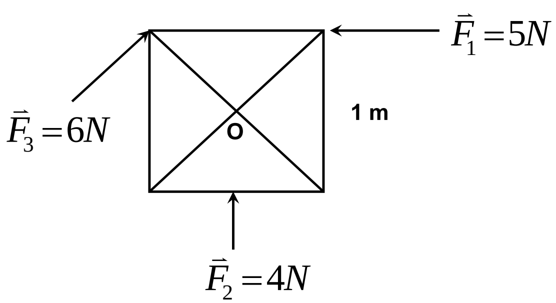
ทอร์กเนื่องจากแรง



$\vec{\Gamma}=\vec{r}\times\vec{F}$ **ทิศทางตามกฎมือขวา**

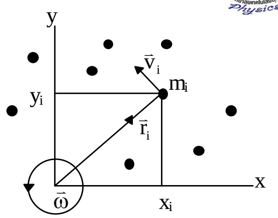
$\Gamma=|\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta$

ตัวอย่าง จงหาทอร์กลัพธ์รอบจุด O เนื่องจากแรงทั้งสาม



พลังงานจลน์ของการหมุน

1. ถ้าระบบเป็นอนุภาคที่ตรึงติดกัน



หมุนรอบแกน z ด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$

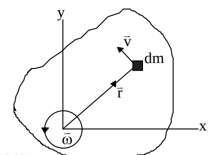
อัตราเร็วเชิงเส้นของอนุภาค i $v_i=\omega r_i$

พลังงานจลน์ของอนุภาคi $E_{k,i}=\frac{1}{2}m_iv_i^2=\frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2=\frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2$

พลังงานรวมของระบบ $E_k=\sum E_{k,i}=\frac{1}{2}(\sum m_ir_i^2)\omega^2$

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}I\omega^2}$$

2. ถ้าระบบเป็นมวลต่อเนื่องกันเป็นก้อน



หมุนรอบแกน z ด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$

แบ่งวัตถุเป็นส่วนเล็กๆ มวล dm อยู่ห่างแกนหมุน r

มวล dm มีอัตราเร็วตามเส้นรอบวง $v=\omega r$

พลังงานจลน์ของมวล dm มีค่า

$$dE_k=\frac{1}{2}v^2dm=\frac{1}{2}\omega^2r^2dm$$

พลังงานจลน์ของวัตถุทั้งก้อน

$$E_k=\frac{1}{2}\omega^2\int r^2dm$$

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}I\omega^2}$$

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2$$

หน่วยที่ 5 การเคลื่อนที่แบบหมุน

ตอนที่ 5.1 วัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตรึง

ตอนที่ 5.2 โมเมนต์ความเฉื่อย

ตอนที่ 5.3 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง

การคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อย

วัตถุเป็นระบบอนุภาคที่ตรึงติดกัน $\boxed{I_z = \sum m_i r_i^2}$

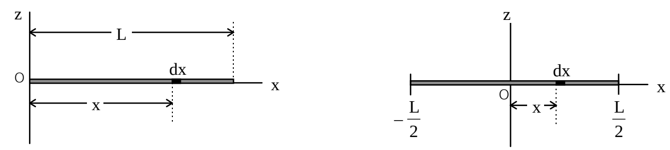
วัตถุมีมวลต่อเนื่องเป็นก้อน $\boxed{I_z = \int r^2 dm}$

ในระบบ SI โมเมนต์ความเฉื่อยมีหน่วย $kg \cdot m^2$

ตอนที่ 5.2 โมเมนต์ความเฉื่อย

- การคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อย
- ทฤษฎีบทแกนตั้งฉาก
- ทฤษฎีบทแกนขนาน

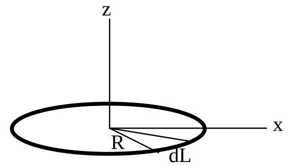
ตัวอย่างที่1 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของเส้นลวดสม่ำเสมอมวล m ยาว L เมื่อแกนหมุนตั้งฉากกับแท่งและอยู่ที่ปลายแท่ง ดังรูป(a) และเมื่อแกนหมุนตั้งฉากกับแท่งและผ่านจุดศูนย์กลางแท่งดังรูป(b)



(a) (b)

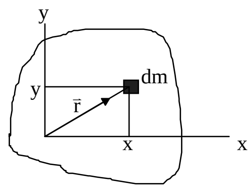
Khanchai Khosonthongkee

ตัวอย่างที่ 5.2 โมเมนต์ความเฉื่อยของห่วงวงกลม หมุนรอบแกนกลางตั้งฉากกับระนาบวงกลม



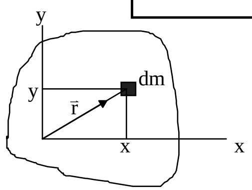
ทฤษฎีบทแกนตั้งฉาก

โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นแบนรอบแกนที่ตั้งฉากกับแผ่น มีค่าเท่ากับผลบวกของโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนสองแกนใดๆ ที่ตั้งฉากกันและอยู่ในระนาบของแผ่น



$$\boxed{I_z = I_x + I_y}$$

ทฤษฎีบทแกนตั้งฉาก



$$\boxed{I_z = \int r^2 dm}$$

โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน z คือ

$$I_z = \int r^2 dm = \int \left(x^2 + y^2\right) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm$$

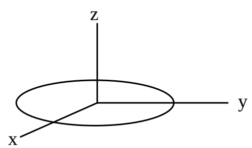
$\int x^2 dm$ คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวัตถุรอบแกน y $\quad I_y$

$\int y^2 dm$ คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวัตถุรอบแกน x $\quad I_x$

$$\boxed{I_z = I_x + I_y}$$

ตัวอย่างที่3 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวงกลมรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางวงกลมโดยใช้ทฤษฎีแกนตั้งฉาก

โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวงกลมรอบแกนกลางตั้งฉากกับแผ่นมีค่า



$$I_z = \frac{mR^2}{2}$$

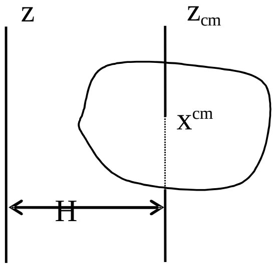
จะเห็นว่าการหมุนรอบแกน x และหมุนรอบแกน y นั้น มีลักษณะเดียวกัน

$$I_x = I_y \qquad I_z = I_x + I_y$$

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{mR^2}{4}$$

โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวงกลมแบนรอบเส้นผ่านศูนย์กลางมีค่า $\dfrac{mR^2}{4}$

ทฤษฎีบทแกนขนาน



ให้ cm เป็นศูนย์กลางมวลของวัตถุก้อนหนึ่งซึ่งมีมวล m

ให้ z_{cm} เป็นแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล

ให้ I_{cm} เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน z_{cm}

ถ้าเปลี่ยนแกนหมุนไปเป็นแกน z ซึ่งขนานกับแกนอยู่ห่างออกไปเป็นระยะ H โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุนี้รอบแกน z มีค่า

$$\boxed{I_z = I_{cm} + mH^2}$$

รัศมีไจเรชัน

โมเมนต์ความเฉื่อยสามารถเขียนในรูปของรัศมี ไจเรชัน

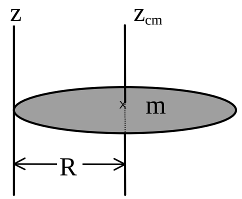
$$I = mk^2$$

I โมเมนต์ความเฉื่อย

m มวล

k รัศมีไจเรชัน

<u>ตัวอย่างที่4</u> กำหนดให้โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวงกลมรอบแกนตั้งฉากกับแผ่น ที่ผ่านจุดศูนย์กลางแผ่น (แกน z_{cm})มีค่า $I_{cm} = \frac{mR^2}{2}$ ถ้าต้องการให้แผ่นวงกลมหมุนรอบแกนตั้งฉากกับแผ่นผ่านขอบแผ่น คือหมุนรอบแกน z ดังรูปจงหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุนนี้



$$I_z = I_{cm} + mH^2$$

$$I_z = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}$$

หน่วยที่ 5 การเคลื่อนที่แบบหมุน

ตอนที่ 5.1 วัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตรึง

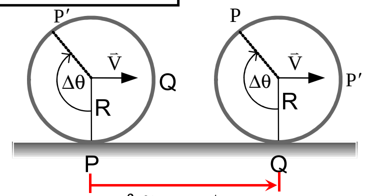
ตอนที่ 5.2 โมเมนต์ความเฉื่อย

ตอนที่ 5.3 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง

ตอนที่ 5.3 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง

- การกลิ้งโดยไม่ลื่นไถล
- การหมุนของวัตถุแข็งเกร็งรอบแกนสมมาตร

การกลิ้งโดยไม่ลื่นไถล



$\vec{V}$ เป็นความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล

$\vec{\omega}$ เป็นความเร็วเชิงมุมของวัตถุที่หมุนรอบจุดศูนย์กลางมวล

ส่วนโค้ง PP' รับมุม $\Delta\theta$ ที่จุดศูนย์กลาง

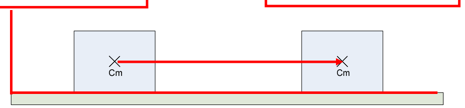
ความยาวของเส้นโค้ง $PP' = R\Delta\theta = R\omega\Delta t$ $\boxed{V = R\omega}$

ความยาวตามเส้นตรง $PQ = V\Delta t$ $\boxed{a = R\alpha}$

การกลิ้งโดยมีการลื่นไถล $\boxed{V \neq R\omega}$

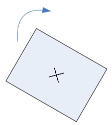
การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง

การเลื่อนที่เชิงเส้น (Translation)	การหมุน (Rotation)



การเลื่อนที่เชิงเส้น

การเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุนั้นเทียบกับแกนพิกัดอ้างอิง



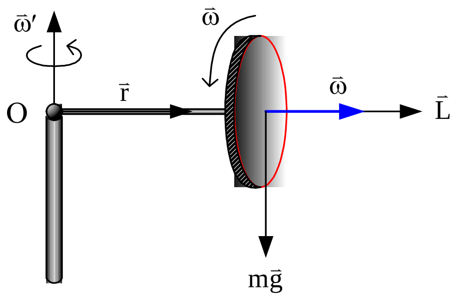
การหมุน

การหมุนของวัตถุรอบแกนซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุนั้น

การหมุนของวัตถุแข็งเกร็งรอบแกนสมมาตร

ไจโรสโคป (gyroscope)

วัตถุใดๆ ที่หมุนรอบแกนสมมาตร โดยที่แกนสมมาตรนั้นเป็นอิสระที่จะหมุนเบนไปรอบแกนอื่นได้ ตัวอย่างเช่น การหมุนของลูกข่างหรือของวงล้อรอบแกนที่วางอยู่บนจุดรองรับ ดังรูป



Khanchai Khosonthongkee

ตัวอย่างที่3 มวล M=2 กิโลกรัม ผูกกับเชือกเบาพันไว้กับรอกรัศมี 10 เซนติเมตร มวล m=0.5 กิโลกรัม รัศมีไจเรชัน 8 เซนติเมตร ถ้าไม่คิดความฝืดที่แกนรอก จงหาความเร่งของมวล M