หน่วยที่ 4 ระบบอนุภาค โมเมนตัมและการชน

ตอนที่ 4.1 ระบบอนุภาค โมเมนตัม และหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม

ตอนที่ 4.2 การชน

ตอนที่ 4.1และ 4.2 ระบบอนุภาค โมเมนตัม หลักการอนุรักษ์โมเมนตัม และการชน

- จุดศูนย์ถ่วง จุดศูนย์กลางมวล และเซนทรอยด์
  - จุดศูนย์ถ่วงและจุดศูนย์กลางมวล
  - เซนทรอยด์
- โมเมนตัมเชิงเส้นและการดล
- โมเมนตัมและหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมของระบบอนุภาค
  - โมเมนตัมเชิงเส้นและหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น
- พลังงานจลน์และหลักการอนุรักษ์พลังงานของระบบอนุภาค

โมเมนตัมเชิงเส้นและการดล

โมเมนตัมเชิงเส้น

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{v}}$$

การดล

$$\boxed{\vec{J} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt}$$

แรงดล

$$\boxed{\vec{J} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = F_{ave}\Delta t}$$

แรงดลเฉลี่ย

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{v}}$$

จากกฎของนิวตัน

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\sum \vec{F}\; dt = d\vec{p}$$

$\sum \vec{F}$ แรงลัพธ์จากภายนอก เขียนใหม่แทนด้วย $\vec{F}$

$$\int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt \;\Rightarrow\; \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt$$

ตัวอย่างที่1 มวล 2 กิโลกรัม ซึ่งอยู่นิ่งได้รับการดล 10 นิวตัน · วินาที หลังจากการนั้น มวล 2 กิโลกรัม จะมีลักษณะอย่างไร

ตัวอย่างที่ 2 ลูกบอลมวล 2 กิโลกรัม มีความเร็ว 1.5 เมตร/วินาที เคลื่อนที่ไปทางขวาชนกับลูกบอลอีกลูกหนึ่ง ซึ่งมีมวล 2 กิโลกรัม เดิมอยู่นิ่งแล้วติดไปด้วยกันจงหาความเร็วของมวลที่ติดกันนี้

โมเมนตัมและหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมของระบบอนุภาค

โมเมนตัมรวมของระบบก่อนชน เท่ากับ โมเมนตัมรวมระบบหลังชน

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{v}}$$

$$\boxed{\sum \vec{P}_{\text{ก่อนชน}} = \sum \vec{P}_{\text{หลังชน}}}$$

ตัวอย่างที่3 ยิงลูกปืนมวล 0.002 กิโลกรัม ออกจากกระบอกปืนมวล 4 กิโลกรัม ด้วยความเร็ว 200 เมตร/วินาที อยากทราบว่าตัวปืนถูกถีบให้ถอยหลังด้วยความเร็วเท่าไร

Khanchai Khosonthongkee

หลักการอนุรักษ์พลังงานของระบบอนุภาค

พลังงานรวมของระบบก่อนชน เท่ากับ พลังงานรวมระบบหลังชน

$$\sum E_{\text{ก่อนชน}} = \sum E_{\text{หลังชน}}$$

$$\sum E_{\text{ก่อนชน}} = E_k + E_{p\text{ สปริง}} + E_{p\text{ โน้มถ่วง}}$$

$$\sum E_{\text{หลังชน}} = E_k + E_{p\text{ สปริง}} + E_{p\text{ โน้มถ่วง}}$$

การชน

การชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์

พลังงานจลน์รวมของระบบก่อนชนเท่ากับพลังงานรวมของระบบหลังชน

การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์

พลังงานจลน์รวมของระบบก่อนชนไม่เท่ากับพลังงานรวมของระบบหลังชน

ตัวอย่างที่4 ลูกบอลลูกที่หนึ่งมวล 4 กิโลกรัม ชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์และเป็นแบบพุ่งตรงกับลูกบอลลูกที่ 2 ซึ่งมีมวล 1 กิโลกรัม ก่อนการชนกันลูกบอลลูกที่หนึ่งมีอัตราเร็ว 10 เมตร/วินาที ลูกบอลลูกที่สองอยู่นิ่ง อัตราเร็วของลูกบอลลูกที่ 2 หลังการชนเท่ากับเท่าไร

ตัวอย่างที่ 5 มวล m1 m2 ถูกยึดเข้าด้วยกันด้วยสปริงที่มีค่าคงที่ k ถ้ามวล m1 และ m2 ถูกดึงออกจากกัน แล้วปล่อยพร้อมๆ กันในขณะหยุดนิ่ง สมมติว่าพื้นไม่มีแรงเสียดทาน จงหาสัดส่วนพลังงานจลน์ของมวลแต่ละก้อนเทียบกับพลังงานจลน์รวมของระบบ หลังจากที่ปล่อยมวลทั้งสองก้อน

Khanchai Khosonthongkee

<u>ตัวอย่างที่6</u> ลูกระเบิดมวล 1 kg. วางนิ่งอยู่บนพื้น ต่อมาลูกระเบิดนั้นระเบิดออกเป็น 2 ชิ้นส่วน ชิ้นส่วนแรกมวล 0.75 kg. ระเบิดไปทางทิศตะวันออกด้วยความเร็ว 100 m/s ชิ้นส่วนที่สองจะระเบิดไปทางไหนด้วยความเร็วเท่าใด

<u>ตัวอย่างที่7</u> แท่งไม้มวล 1 kg ติดอยู่กับสปริง มีค่าคงตัวของสปริง 200 $\mathrm{Nm^{-1}}$ วางบนพื้นที่ไม่มีแรงเสียดทาน กระสุนปืนมวล 200 g ถูกยิงไปยังแท่งไม้ ปรากฏว่าสปริงหดเข้าไป 13.3 cm จงหาความเร็วก่อนชนของกระสุนปืน

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> ลูกปืนมวล 10 g ยิงเข้าหาแท่งไม้มวล 5 kg แล้วฝังตัวในแท่งไม้ ทำให้แท่งไม้และลูกปืนแกว่งสูงขึ้น 10 cm จงหาความเร็วต้นของลูกปืน (g = 10 $\mathrm{m/s^2}$)

<u>ตัวอย่างที่9</u> รถสินค้ามวล 35.0 ตัน ชนกับรถโดยสารที่อยู่นิ่ง รถทั้งสองติดกันไป และมีการสูญเสียพลังงานไป 27% ของพลังงานเริ่มต้นในรูปของความร้อน เสียงและการสั่นตัว จงคำนวณหามวลของรถโดยสาร

<u>ตัวอย่างที่10</u> ลูกบอลมวล 325 กรัม มีอัตราเร็ว v = 6.22 เมตร/วินาที เข้ากระทบผนังเป็นมุม θ = 30° กับผนังแล้วสะท้อนออกมา ด้วยอัตราเร็วเดิมและมุมเท่าเดิม ถ้าลูกบอลเข้ากระทบผนังกินเวลา 10.4 มิลลิวินาที จงคำนวณ

1) การดลที่กระทำต่อลูกบอล

2) แรงดลเฉลี่ยที่ลูกบอลกระทำต่อผนัง

<u>ตัวอย่างที่11</u> นักสเก็ตน้ำแข็งเข้าชนกันและกอดกัน เป็นการชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ ถ้าสมชายมีมวล $m_A = 83$ กิโลกรัม กำลังเคลื่อนที่ไปทางตะวันออกด้วยความเร็ว $v_A = 6.4$ กิโลเมตร/ชั่วโมง สมหญิงมีมวล $m_B = 55$ กิโลกรัม กำลังเคลื่อนที่ไปเหนือด้วยความเร็ว $v_B = 8.8$ กิโลเมตร/ชั่วโมงจงคำนวณ

(a) ความเร็วร่วมของสมชายและสมหญิงหลังการชน

(b) สัดส่วนของพลังงานจลน์ที่เปลี่ยนแปลงหลังการชน

จุดศูนย์ถ่วง จุดศูนย์กลางมวล และเซนทรอยด์

จุดศูนย์ถ่วงและจุดศูนย์กลางมวล

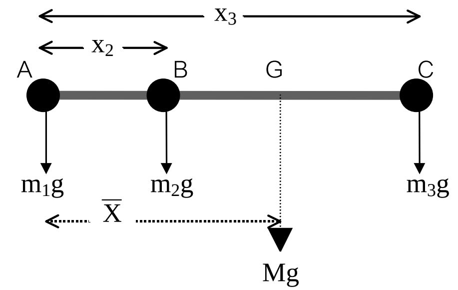
จุดศูนย์ถ่วง (center of gravity,cg)

มีมวล m_1, m_2, m_3 มีน้ำหนัก m_1g , m_2g , m_3g

มวลรวมมีค่า $M = m_1 + m_2 + m_3$ น้ำหนักรวมมีค่า Mg

การหาตำแหน่ง cg ทำได้โดยหาโมเมนต์ของแรง
โดยใช้หลักผลรวมของโมเมนต์ ของแรงย่อย รอบจุดหมุนใดๆ มีค่าเท่ากับโมเมนต์ของแรงรวมรอบจุดหมุนเดียวกัน

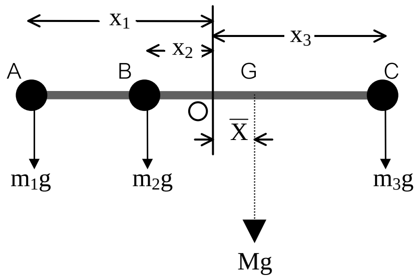
ให้จุดหมุนอยู่ที่ปลายคานด้านซ้าย



$$m_1g(0)+m_2g(x_2)+m_3g(x_3)=Mg\overline{X}$$

$$\overline{X}=\frac{m_1x_1g+m_2x_2g+m_3x_3g}{Mg} \qquad \overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{3} m_ix_ig}{\sum_{i=1}^{3} m_ig}$$

ให้จุดหมุนอยู่ที่จุดกึ่งกลางคาน ตั้งแกนที่จุด O

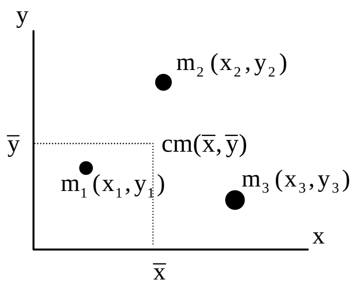


$$(m_1 g)(-x_1)+(m_2 g)(-x_2)+(m_3 g)(x_3)=Mg\overline{X}$$

ถ้า g ที่ตำแหน่งของแต่ละมวลมีค่าเท่ากัน ก็จะตัด g ทิ้งไปได้

เรียกจุด G ว่า จุดศูนย์กลางมวลใช้ตัวย่อ cm ของระบบนี้

ในสองมิติ



มวลรวม

$$M = m_1 + m_2 + m_3 = \sum_{i=1}^{3} m_i$$

โมเมนต์รอบแกน y

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = M\bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}$$

โมเมนต์รอบแกน x

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = M\bar{y}$$

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}$$

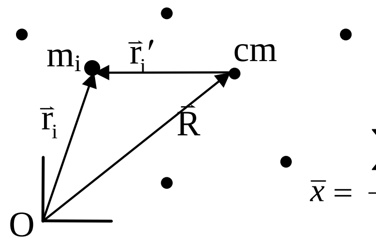
ในหนึ่งมิติ $\quad \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}$

ในสองมิติ $\quad \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} \qquad \bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}$

ในสามมิติ $\quad \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} \qquad \bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} \qquad \bar{z} = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}$

สมมติระบบหนึ่งประกอบด้วย n อนุภาคแต่ละอนุภาคมีมวล

$m_1, m_2, \ldots, m_i \ldots, m_n$ อยู่ที่ตำแหน่ง $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots \vec{r}_i \ldots \vec{r}_n$ ตามลำดับ



ให้ตำแหน่งของศูนย์กลางมวลอยู่ที่

$$\vec{R}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{x}\hat{i} + \bar{y}\hat{j} + \bar{z}\hat{k}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \ldots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\boxed{\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}} \qquad M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

SUT Physics I unit04

Khanchai Khosonthongkee

ในกรณีวัตถุแข็งเกร็ง คือ วัตถุที่มีมวลต่อเนื่องกันเป็นก้อนนั้น โดยที่วัตถุแข็งเกร็งก็คือระบบอนุภาคที่ระยะระหว่างแต่ละอนุภาคถูกตรึงให้คงที่นั่นเอง

ตำแหน่งศูนย์กลางมวลของวัตถุแข็งเกร็งจึงเหมือนกับตำแหน่งศูนย์กลางมวลระบบอนุภาคเพียงแต่เปลี่ยนเครื่องหมายผลบวกเป็นเครื่องหมายอินทิเกรต

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\bar{x} = \frac{\int xdm}{\int dm} = \frac{\int xdm}{M} \qquad \bar{y} = \frac{\int ydm}{\int dm} = \frac{\int ydm}{M} \qquad \bar{z} = \frac{\int zdm}{\int dm} = \frac{\int zdm}{M} \qquad \vec{R} = \frac{\int \vec{r}dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r}dm}{M}$$

$$M = \int dm$$

ถ้าจุด CM ของระบบอยู่ที่

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}$$

เมื่อระบบเคลื่อนที่ จุด CM ก็จะเคลื่อนที่ ด้วยความเร็วเท่ากับ

$$\vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{M}$$

และความเร่ง เท่ากับ

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i}{M}$$

จงหาจุดศูนย์กลางมวลของ

มวล $m_1 = 1$ kg วางไว้ที่ (1 , 1)

มวล $m_2 = 2$ kg วางไว้ที่ (2 , −2)

การหาจุดศูนย์กลางมวล ของวัตถุที่มีค่าความหนาแน่น

ความหนาแน่นเชิงเส้น	$\lambda = \frac{m}{L}$	L	คือความยาว
ความหนาแน่นเชิงพื้นที่	$\sigma = \frac{m}{A}$	A	คือพื้นที่
ความหนาแน่นเชิงปริมาตร	$\rho = \frac{m}{V}$	V	คือปริมาตร

$$\lambda = \frac{m}{L} \Rightarrow \lambda = \frac{dm}{dx} \Rightarrow dm = \lambda dx$$

$$\sigma = \frac{m}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{dm}{da} \Rightarrow dm = \sigma da$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV$$

กรณี 1 มิติ

$$\bar{x} = \frac{\int xdm}{\int dm} = \frac{\int xdm}{M}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\lambda dx}{M}$$

กรณี 2 มิติ เมื่อจุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่ $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{\int xdm}{\int dm} = \frac{\int xdm}{M} \qquad \bar{y} = \frac{\int ydm}{\int dm} = \frac{\int ydm}{M}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\sigma da}{M} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\sigma da}{M}$$

กรณี 3 มิติ เมื่อจุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\bar{x} = \frac{\int xdm}{\int dm} = \frac{\int xdm}{M} \qquad \bar{y} = \frac{\int ydm}{\int dm} = \frac{\int ydm}{M} \qquad \bar{z} = \frac{\int zdm}{\int dm} = \frac{\int zdm}{M}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\rho dV}{M} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\rho dV}{M} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\rho dV}{M}$$

<u>ตัวอย่างที่12</u> จงหาจุดศูนย์กลางมวลของเส้นตรงที่มีความยาว 20 cm มีความหนาแน่น $\lambda = a + bx$ เมื่อ $a = 2g/m$ และ $b = 6g/m^2$

$$\frac{410}{31} \approx 13.23$$

การหาจุดศูนย์กลางมวล กรณี 1 มิติ

$$\bar{x} = \frac{\int xdm}{\int dm} = \frac{\int x\lambda dx}{\int \lambda dx}$$

ถ้าความหนาแน่นเชิงเส้นเป็นค่าคงตัว (ไม่ขึ้นกับตำแหน่ง)

$$\bar{x} = \frac{\int xdm}{\int dm} = \frac{\lambda\int xdx}{\lambda\int dx} = \frac{\int xdx}{\int dx} = \frac{\int xdx}{L}$$

การหาจุดศูนย์กลางมวล กรณี 2 มิติ

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int x\sigma\,da}{\int \sigma\,da} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{\int y\sigma\,da}{\int \sigma\,da}$$

ถ้าความหนาแน่นเชิงพื้นที่เป็นค่าคงตัว (ไม่ขึ้นกับตำแหน่ง)

$$\bar{x} = \frac{\sigma\int x\,da}{\sigma\int da} = \frac{\int x\,da}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\sigma\int y\,da}{\sigma\int da} = \frac{\int y\,da}{A}$$

การหาจุดศูนย์กลางมวล กรณี 3 มิติ

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int x\rho\,dV}{\int \rho\,dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{\int y\rho\,dV}{\int \rho\,dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dm}{\int dm} = \frac{\int z\rho\,dV}{\int \rho\,dV}$$

ถ้าความหนาแน่นเชิงปริมาตรเป็นค่าคงตัว (ไม่ขึ้นกับตำแหน่ง)

$$\bar{x} = \frac{\rho\int x\,dV}{\rho\int dV} = \frac{\int x\,dV}{V}$$

$$\bar{y} = \frac{\rho\int y\,dV}{\rho\int dV} = \frac{\int y\,dV}{V}$$

$$\bar{z} = \frac{\rho\int z\,dV}{\rho\int dV} = \frac{\int z\,dV}{V}$$

เซนทรอยด์

ตำแหน่งเฉลี่ยที่หาจากลักษณะทางเรขาคณิตเพียงอย่างเดียวนี้เรียกว่า **เซนทรอยด์** (centroid) ซึ่งมีทั้งเซนทรอยด์ของปริมาตร เซนทรอยด์ของพื้นที่ และเซนทรอยด์ของเส้น

เซนทรอยด์ของเส้น $x_c = \dfrac{\int x\,dx}{L}$

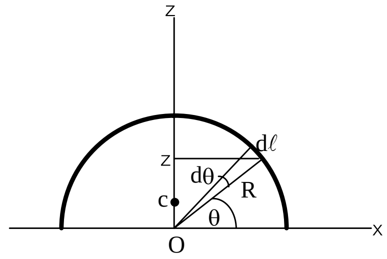
เซนทรอยด์ของพื้นที่ (x_c , y_c)

$$x_c = \frac{\int x\,da}{A} \qquad y_c = \frac{\int y\,da}{A}$$

เซนทรอยด์ของปริมาตร (x_c , y_c, z_c)

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dV}{V}$$

<u>ตัวอย่าง</u> เส้นโลหะบางชิ้นหนึ่ง ถูกดัดให้เป็นรูปครึ่งวงกลมที่มีรัศมี R ดังรูป จงหาจุดศูนย์กลางมวลของครึ่งวงกลมนี้

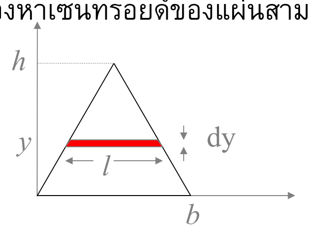


$$\bar{Z} = \frac{\int z\,dl}{L} \qquad z = R\sin\theta \qquad dl = R\,d\theta$$

$$z_c = \frac{2R}{\pi}$$

<u>ตัวอย่าง</u>

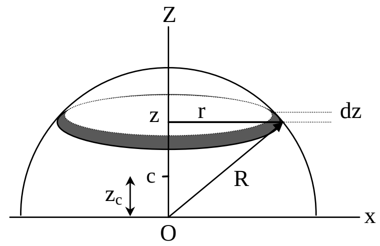
จงหาเซนทรอยด์ของแผ่นสามเหลี่ยมความสูง h ความกว้างฐาน b



$$\bar{Y} = \frac{\int y dA}{A} \qquad dA = l dy \qquad l = \frac{b(h-y)}{h}$$ (สามเหลี่ยมคล้าย)

ตอบ $\bar{Y} = h/3$

<u>ตัวอย่าง</u> หาเซนทรอยด์ของครึ่งทรงกลมรัศมี R



$$\bar{Z} = \frac{\int z dV}{V} \qquad dV = \pi (R^2 - z^2) dz$$

ตอบ $\bar{Z} = 3R/8$